

В.А. Матвеев

# ГИРОСКОП – ЭТО ПРОСТО



Москва 2012

УДК 62-752.4

ББК 22.213

М33

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор Института проблем  
механики РАН Ю.К. Жбанов;

д-р техн. наук, профессор МГУ им. М.В. Ломоносова Б.С. Лунин

**Матвеев В. А.**

М33      Гироскоп — это просто / В. А. Матвеев. — М.: Изд-во  
МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. — 191, [1] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-3576-0

Кратко изложены принципы действия и основы теории типовых гироскопических приборов, которые эксплуатируются в настоящее время, с традиционных позиций прикладной теории гироскопов. Особое внимание уделено физическому смыслу работы гироскопов и составлению их уравнений (на базе принципа Даламбера, теоремы Резаля или уравнений Эйлера) с последующим анализом погрешностей в рамках ограниченных допущений. Содержание книги соответствует курсу лекций для бакалавров, который автор читает в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов, обучающихся по специальностям «Навигационные гироскопические системы», «Системы управления летательными аппаратами», а также для инженеров, работающих в области создания систем навигации и управления подвижными объектами. Отдельные разделы могут служить основой для выполнения научно-исследовательских работ выпускников старших классов, в частности, по программе олимпиад «Шаг в будущее», «Космонавтика».

УДК 62-752.4

ББК 22.213

ISBN 978-5-7038-3576-0

© Матвеев В.А., 2012

© Оформление. Издательство  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012



электроники и новых способов обработки информации. Так, бескарданные системы навигации, построенные на микромеханических гироскопах, моделируют гироскопические карданные системы (гировертикали, курсовертикали и т. д.).

Поскольку точность микромеханических гироскопов пока невысока, чрезвычайную актуальность приобретают проблемы алгоритмической компенсации погрешностей гироскопа в зависимости от условий эксплуатации: различных эволюций объектов (вираж, фугоидные колебания, прямолинейный полет, потеря высоты, фигуры высшего пилотажа), линейных и вибрационных перегрузок, температуры окружающей среды, давления, радиация и др.

В ряде систем допускается кратковременная коррекция выходных сигналов гироскопов от ГЛОНАСС, GPS или чувствительных элементов, показания которых зависят от характеристик физических полей (магнитных, тепловых и др.). Это приобретает особую значимость при построении интегрированных пилотажно-навигационных комплексов.

Использование достижений нанотехнологии, микрооптической технологии (волоконно-оптические волновые элементы, фотонно-кристаллические волокна) при создании волоконно-оптических гироскопов, применение принципа построения гироскопов на основе эффекта волн Деброяля позволят в дальнейшем значительно улучшить характеристики гиросистем.

Во введении рассмотрены свойства гироскопа, даны примеры составления приближенных уравнений движения гироскопов, описаны механика и принципы работы гироскопов основных типов.

В разделах 1 и 2 раскрыто понятие собственной скорости прецессии гироскопа, приведена методика выбора модели погрешности гироскопа, проанализированы погрешности свободного гироскопа при реализации подвижной системы координат.

Раздел 3 посвящен вопросам определения курсового угла объекта с помощью трехстепенного гироскопа, включая гиросполукомпас, гироскомпас и гиросорбитант.

В разделах 4 и 5 изложены вопросы измерения углов ориентации объекта относительно вертикали с помощью гироскопа: свободного гироскопа, гиромаятника, гировертикали с позиционной и интегральной коррекцией. Составлены уравнения движения гироскопа, проанализированы основные погрешности гироскопов, характерные при измерении углов крена и тангажа объекта. В частности, рассмотрен вопрос настройки на период Шулера гировертикали, не имеющей баллистической погрешности. Даны схемы, выполнен краткий анализ погрешностей гиругоризонта, гировертиканта и гируинтегратора системы управления баллистической ракеты.

В разделах 6—8 изучены вопросы измерения угловой скорости и ее интегрирования с помощью гироскопов, имеющих быстровращающийся ротор, составлены уравнения движения и проанализированы основные погрешности таких гироскопов. Приведены схемы гируприборов, построенных на базе классического двухстепенного гироскопа: интегрирующего гироскопа, датчиков угловых скоростей (ДУС) с механической и электрической пружинами, а также схема двухкомпонентного ДУС на базе трехстепенного астатического гироскопа, имеющего две перекрестные электропружины по осям карданова подвеса. Дан анализ работы двухстепенного вибрационного роторного гироскопа (ВРГ), теория которого в какой-то мере характерна для виброскопов различных типов. Успешным развитием схемы ВРГ явилась схема трехстепенного динамически настраиваемого гироскопа (ДНГ) — трехстепенного роторного вибрационного гироскопа с внутренним упругим вращающимся кардановым подвесом, у которого при динамической настройке упругие моменты торсионов компенсируются центробежным моментом инерции кольца. Составлены прецессионные уравнения, проанализированы погрешности движения ДНГ для двух режимов работы: двухканального интегрирующего (свободного) гироскопа и трехстепенного двухкомпонентного ДУС.

Разделы 9—12 посвящены вибрационным и оптическим гироскопам, которые получили широкое распространение в конце XX — начале XXI в.: это волновой твердотельный, воло-

конно-оптический, вибрационный рамочный, микромеханический гироскопы, лазерный ДУС. Кратко изложены основы прикладной теории, определены выходные характеристики и погрешности giroприборов.

Принципы работы гиросtabilизаторов описаны в разделе 13. Приведены схемы и краткий анализ работы одно-, двух- и трехосных гиросtabilизаторов, построение которых предполагает использование различных чувствительных элементов: двухстепенных гиросблоков, поплавковых интегрирующих, микромеханических гироскопов, ДУС, ДНГ.

В целом материал книги требует внимательного прочтения, тогда он будет восприниматься в соответствии с названием: «Гироскоп — это просто».

## ВВЕДЕНИЕ

---

В последнее время развитие авиации, включая создание современных беспилотных аппаратов, тактических ракет, автомобильного транспорта, робототехники, малых космических летательных аппаратов, потребовало создания нового поколения миниатюрных гироскопов для систем ориентации, стабилизации и навигации. Микромеханические гироскопы (ММГ) обладают малыми массогабаритными характеристиками, имеют малое время готовности, высокие надежность и срок службы, малые энергетические затраты и низкую стоимость. Большинство развитых стран (США, Франция, Япония, Китай и др.) в настоящее время производят ММГ, различающиеся конструктивным исполнением, точностью и стоимостью [1].

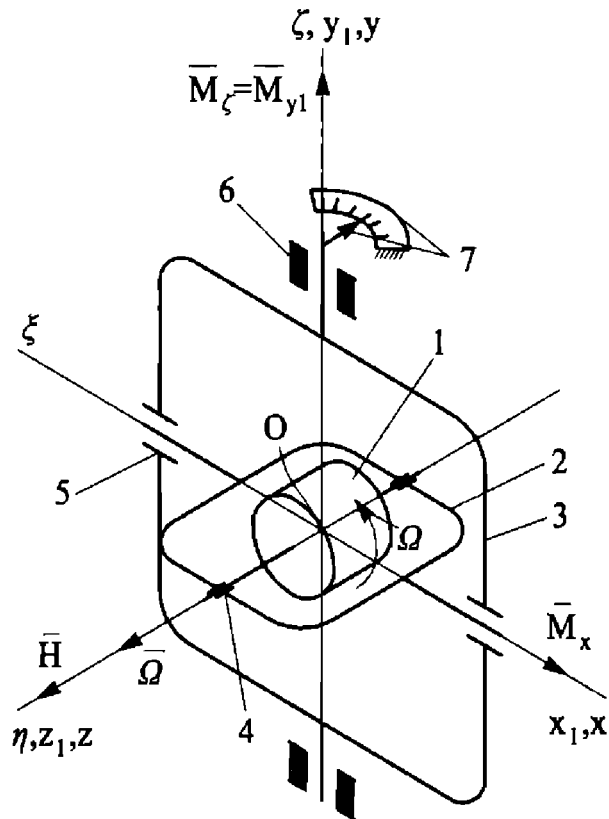
При разработке и производстве ММГ используются достижения вычислительной техники и микроэлектроники, новейшие технологии, связанные, в частности, с применением монокристаллического кремния, автоматизированные системы разработки и изготовления, а при эксплуатации применяются современные системы коррекции выходной информации ММГ. В России пока отсутствует крупносерийное производство ММГ, хотя их применение имеет широкие перспективы.

История гироскопии начинается с известных опытов Л. Фуко (1852 г.), который с помощью быстровращающегося ротора, помещенного в карданов подвес, экспериментально показал наличие суточного вращения Земли. Отсюда и возникло название такого устройства — гироскоп (от греч. «ги-ро» — вращение, «скопео» — наблюдаю).

Одно из первых определений: гироскоп — это быстровращающийся ротор с одной неподвижной точкой, эллипсоид инерции которого есть эллипсоид вращения.



Применение карданова подвеса (рис. 1) реализует неподвижную точку  $O$ , которая является точкой пересечения осей карданова подвеса, состоящего из внутренней и наружной рамок. Если центр масс гироскопа совпадает с т.  $O$ , то гироскоп называют астатическим, в противном случае — «тяжелым». Астатический гироскоп, к которому не прикладываются внешние моменты, называют свободным. В технике под свободным подразумевают астатический гироскоп, у которого отсутствует система приложения управляющих моментов (система коррекции).



**Рис. 1.** Схема трехстепенного гироскопа в кардановом подвесе:

1 — ротор; 2 — внутренняя рамка подвеса; 3 — наружная рамка подвеса; 4 — опоры ротора — главные опоры гироскопа; 5, 6 — опоры рамок карданова подвеса — чувствительные опоры гироскопа; 7 — индикатор, жестко связанный с осью наружной рамки 3, со шкалой на корпусе прибора (датчик угла);  $O\xi\eta\zeta$  — инерциальная система координат (СК);  $Ox_1y_1z_1$  — СК, связанная с наружной рамкой 3;  $Oxуz$  — СК, связанная с внутренней рамкой 2 (система осей Резаля);  $M_\zeta = M_{y_1}$ ,  $M_x$  — внешние моменты, действующие вокруг осей  $Oy_1$  и  $Ox$  карданова подвеса

Основной характеристикой гироскопа является собственный кинетический момент  $\bar{H}$ :

$$\bar{H} = C\bar{\Omega},$$

где  $C$  — осевой (полярный) момент инерции ротора;  $\Omega \approx \approx (3 \dots 120)10^3$  об/мин — угловая скорость собственного вращения ротора.

Ось ротора (вектор  $\bar{H}$ ) астатического трехстепенного свободного гироскопа сохраняет начальное положение в инерциальном пространстве при отсутствии воздействия внешних моментов (*1-е свойство*).

Следовательно, гироскоп может материализовать базовую опорную инерциальную систему координат, относительно которой можно измерить угловое положение движущегося объекта.

Пусть трехстепенной гироскоп установлен на подвижном основании относительно Земли так, что ось наружной рамки вертикальна и параллельна оси  $Oz_r$  и ее плоскость находится в плоскости меридиана. Очевидно, наблюдатель будет видеть поворот гироскопа с угловой скоростью  $U \sin \varphi$  вокруг оси наружной рамки и с угловой скоростью  $U \cos \varphi$  вокруг оси внутренней рамки (рис. 2), поскольку направление  $\bar{H}$  неизменно в инерциальном пространстве.

Относительно наблюдателя за время  $\Delta t$  углы поворота гироскопа будут  $\alpha_k = \Delta t U \sin \varphi$  и  $\beta_k = \Delta t U \cos \varphi$ , которые называют кажущимся (или видимым) уходом гироскопа. Если на гироскоп действуют возмущающие моменты  $M_z$  и  $M_x$  (вокруг осей карданова подвеса), то возникает угловая скорость поворота (прецессия) ротора вокруг осей подвеса (*2-е свойство*):

$$\dot{\beta} = \frac{M_z}{H}; \quad \dot{\alpha} = \frac{M_x}{H}, \quad (1)$$

где  $\beta$ ,  $\alpha$  — углы поворота ротора вокруг осей внутренней и наружной рамок гироскопа ( $\beta_0 = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ ).

Скорость отклонения гироскопа под действием возмущающих (вредных) моментов называют собственной скоростью прецессии (ССП) гироскопа  $\omega_{\text{ссп}}$ , скоростью ухода  $\omega_{\text{ух}}$  (или дрейфа  $\omega_{\text{др}}$ ) с размерностью  $^\circ/\text{ч}$ ,  $'/\text{мин}$ ,  $''/\text{с}$ . СПП характеризует



гося ухода и ухода, вызванного действием вредных моментов. Например, погрешность измерения гироскопом (рис. 2, б) курса объекта (при принятых допущениях), пренебрегая угловой скоростью движения объекта относительно Земли  $V/R$ , где  $V$  — скорость объекта относительно Земли, а  $R$  — радиус Земли, можно вычислить по формуле

$$\Delta\psi = \left( U \sin \varphi + \frac{M_x}{H} \right) \Delta t.$$

Компенсация кажущегося ухода осуществляется управлением гироскопа либо его учетом при обработке информации. Возмущающие моменты необходимо сводить к минимуму. Замечательные свойства гироскопа объясняются действием кориолисовых сил инерции, которые называют гироскопическими (жироскопическими) силами.

Как известно, кориолисово ускорение  $\bar{W}_k$  возникает при сложном движении тела с переносной угловой скоростью  $\bar{\omega}_e$  и относительной линейной скоростью  $\bar{V}_r$  (рис. 3).

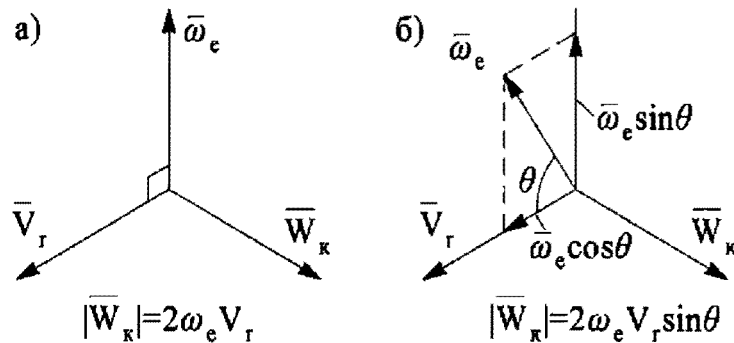


Рис. 3. Кориолисово ускорение:

а —  $\bar{\omega}_e \perp \bar{V}_r$ ; б —  $\bar{\omega}_e \neq \bar{V}_r$

Если  $\bar{V}_r \perp \bar{\omega}_e$  (рис. 3, а), то вектор  $\bar{W}_k$  перпендикулярен к плоскости, образуемой векторами  $\bar{V}_r$  и  $\bar{\omega}_e$ , а модуль  $\bar{W}_k$  равен

$$|\bar{W}_k| = 2\omega_e V_r. \quad (2)$$

Если существует угол  $\theta$  между векторами  $\bar{V}_r$  и  $\bar{\omega}_e$  (рис. 3, б), то составляющая угловой скорости  $\omega_e \sin \theta$  является причиной возникновения кориолисова ускорения  $W_k$ . Тогда в соответствии с выражением (2) получим

$$W_k = 2\omega_e \sin \theta V_r.$$



сила инерции  $\Delta F_k = \Delta m W_k$ , которая создает моменты вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$   $\Delta M_x = -\Delta F_k r \cos \varphi$  и  $\Delta M_y = -\Delta F_k r \sin \varphi$ .

Перейдя от приращений к дифференциалам ( $\Delta \rightarrow d$ ) и проинтегрировав, получим

$$M_x = -2\omega_e \Omega \rho h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi =$$

$$= -2\omega_e \Omega \rho h \frac{\pi R^4}{2} = -\omega_e \Omega \frac{mR^2}{2} = -C\Omega\omega_e = -H\omega_e; \quad (4)$$

$$M_y = 0,$$

где  $H = C\Omega$  — кинетический момент гироскопа.

Поясним физический смысл возникновения гироскопического момента  $M_g = M_x$  быстровращающегося ротора гироскопа, который имеет переносную угловую скорость  $\bar{\omega}_e$  (рис. 5) вокруг оси  $Oy$  в инерциальном пространстве.

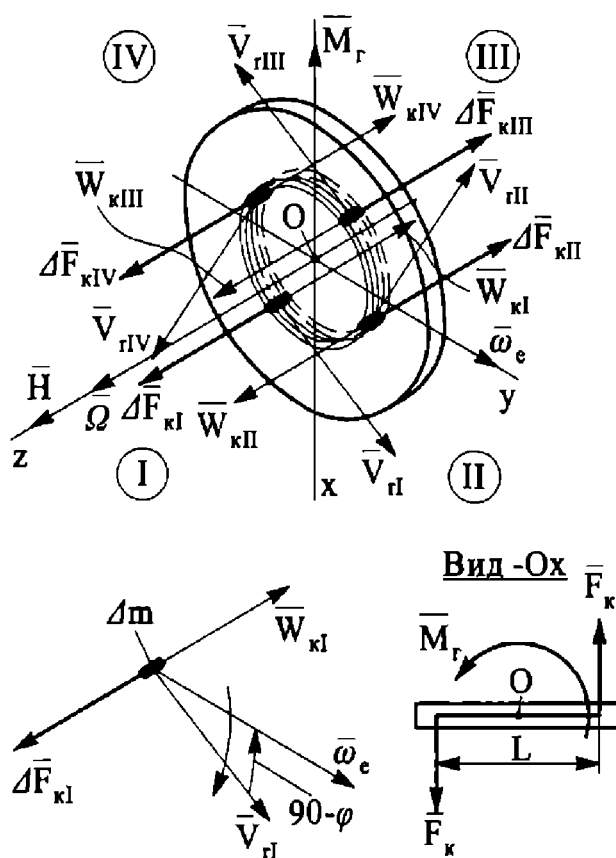


Рис. 5. К пояснению физического смысла гироскопического момента

В квадрантах I—IV выделим элементарные массы  $\Delta m$  ротора, относительная линейная скорость которых  $V_r = r\Omega$ . Кориолисово ускорение массы  $\Delta m$  в квадранте I  $W_{кI} = -2\omega_e V_r$ , кориолисова сила инерции  $\bar{F}_{кI}$  направлена противоположно  $\bar{W}_{кI}$   $F_{кI} = \Delta m W_{кI}$ . Аналогично определяем  $\bar{W}_{кII}$ ,  $\bar{W}_{кIII}$ ,  $\bar{W}_{кIV}$  и соответственно кориолисовы силы инерции  $\Delta\bar{F}_{кII}$ ,  $\Delta\bar{F}_{кIII}$ ,  $\Delta\bar{F}_{кIV}$ .

Введем обозначение:  $|\bar{F}_к| = |\bar{F}_{кI} + \bar{F}_{кIV}| = |\bar{F}_{кII} + \bar{F}_{кIII}|$ .

Видно (см. рис. 5), что кориолисовы силы инерции  $\bar{F}_к$  создают момент  $M_r = F_к L$ , который и называют гироскопическим. Вектор  $\bar{M}_r$  направлен так, что с его конца видно совмещение вектора  $\bar{H}$  кратчайшим путем с вектором  $\bar{\omega}_e$  переносной угловой скорости; в рассматриваемом случае  $\bar{M}_r$  направлен вдоль отрицательной оси  $Ox$ .

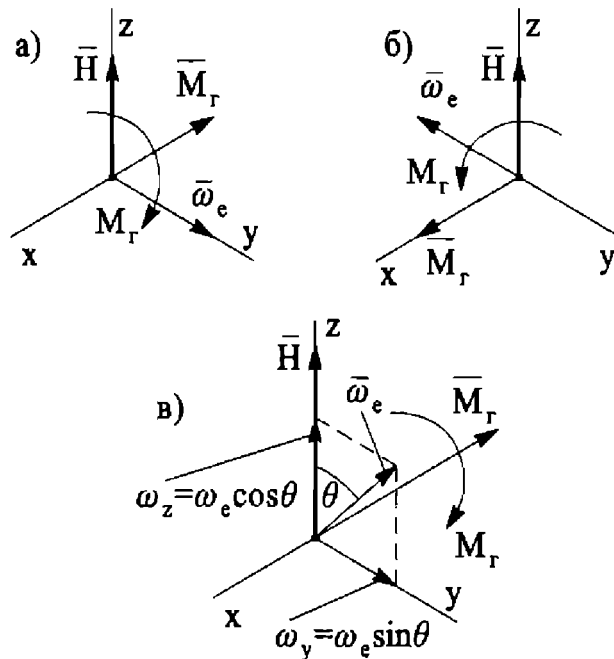


Рис. 6. К определению гироскопического момента  $\bar{M}_r$

На рис. 6 показан случай  $\bar{H} \perp \bar{\omega}_e$ ,  $\omega_e > 0$ ; гироскопический момент  $\bar{M}_r$  направлен вдоль отрицательной оси  $Ox$ ; при  $\omega_e < 0$  (рис. 6, б)  $\bar{M}_r$  направлен вдоль положительной оси  $Ox$  (кратчайшее направление совмещения  $\bar{H}$  и  $\bar{\omega}_e$  — против часовой стрелки, если смотреть с положительной оси  $Ox$ ). При наличии угла  $\theta$  между  $\bar{H}$  и  $\bar{\omega}_e$  составляющая  $\bar{\omega}_y = \bar{\omega}_e \sin \theta$  служит причиной возникновения гироскопического момента ( $\bar{H} \perp \bar{\omega}_y$ )

$M_r = H\omega_y = H\omega_e \sin \theta$ , т. е. гироскопический момент  $\bar{M}_r$  является векторным произведением:

$$\bar{M}_r = \bar{H} \times \bar{\omega}_e. \quad (5)$$

Гироскопический момент, увеличивая инерционное сопротивление, способствует эффективному сопротивлению гироскопа внешним возмущениям. Рассмотрим действие внешнего момента на трехстепенной гироскоп в кардановом подвесе (рис. 7) с невесомыми рамками для малых углов  $\alpha$  и  $\beta$  отклонения оси гироскопа от инерциальной СК  $O\xi\eta\zeta$ . Пользуясь принципом Даламбера, составим уравнение относительно осей  $Ox_1y_1z_1$  (осей Резаля), связанных с внутренней рамкой гироскопа:

$$\bar{M}_{ин} + \bar{M}_r + \bar{M}_{вн} = 0, \quad (6)$$

где  $M_{ин}$  — момент инерции твердого тела, равный произведению момента инерции  $A$  на угловое ускорение и направленный

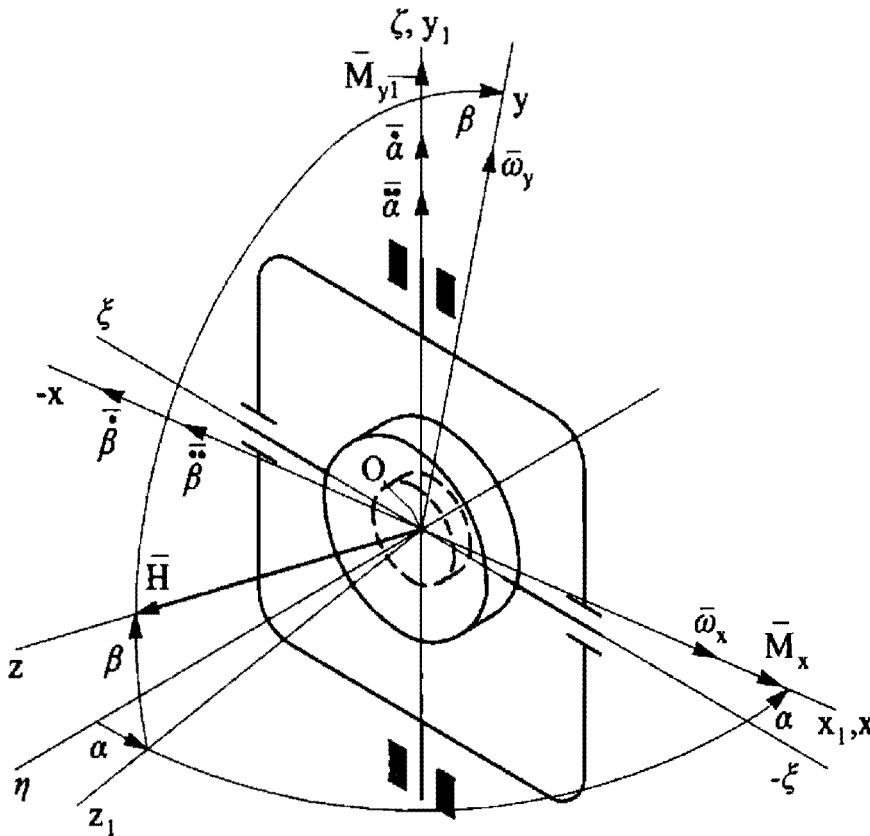


Рис. 7. К составлению уравнений движения трехстепенного гироскопа



противоположно вектору углового ускорения  $\dot{\omega}_x$  и  $\dot{\omega}_y$  ( $-A\dot{\omega}_x$ ,  $-A\dot{\omega}_y$ );  $M_r$  — гироскопический момент ( $-H\omega_y$ ,  $H\omega_x$ );  $M_{вн}$  — момент внешних сил. Абсолютные угловые скорости и угловые ускорения в проекциях на оси Резаля:

$$\begin{aligned}\omega_y &= \dot{\alpha} \cos \beta \approx \dot{\alpha}; & \dot{\omega}_y &= \ddot{\alpha}; \\ \omega_x &= -\dot{\beta}; & \dot{\omega}_x &= -\ddot{\beta}.\end{aligned}\tag{7}$$

Уравнения вынужденного движения трехстепенного гироскопа в соответствии с выражением (6):

$$\begin{aligned}-A\dot{\omega}_x - H\omega_y + M_x &= 0; \\ -A\dot{\omega}_y + H\omega_x + M_{y1} &= 0\end{aligned}\tag{8}$$

или с учетом соотношений (7)

$$\begin{aligned}A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + M_x &= 0; \\ -A\ddot{\alpha} - H\dot{\beta} + M_y &= 0,\end{aligned}\tag{9}$$

где  $A$  — экваториальный момент инерции ротора;  $M_x$ ,  $M_y \approx M_{y1}$  — внешние моменты, действующие вокруг осей кардана подвеса.

Собственное (свободное) движение гироскопа описывается уравнениями при  $M_x = 0$ ,  $M_y = 0$ :

$$\begin{aligned}A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} &= 0; \\ A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &= 0.\end{aligned}\tag{10}$$

Запишем определитель системы ( $\ddot{\beta} = s^2\beta$ ;  $\dot{\beta} = s\beta$ ;  $\ddot{\alpha} = s^2\alpha$ ;  $\dot{\alpha} = s\alpha$ ):

$$\Delta = \begin{vmatrix} As^2 & -Hs \\ Hs & As^2 \end{vmatrix} = A^2s^4 + H^2s^2 = s^2(A^2s^2 + H^2) = 0.$$

Корни уравнений:  $s_{1,2} = 0$ ;  $s_{3,4} = \frac{H}{A}i$ , т. е. собственное (свободное) движение гироскопа представляет собой незатухающие гармонические колебания (нутацию) с частотой  $n = \frac{H}{A}$ , которую называют частотой нутации гироскопа.

Решение системы уравнений (10) найдем в виде

$$\begin{aligned}\alpha &= C_1 \sin nt + C_2 \cos nt; \\ \dot{\beta} &= -\frac{A}{H} \ddot{\alpha} = -\frac{\ddot{\alpha}}{n} = C_1 n \sin nt + C_2 n \cos nt; \\ \beta &= -C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + C_3.\end{aligned}\quad (11)$$

Постоянные интегрирования  $C_1, C_2, C_3$  определим при следующих начальных условиях:  $t = 0; \alpha = 0; \beta = 0; \dot{\beta} = 0; \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 \neq 0$  (например, гироскопу ударом сообщена начальная угловая скорость  $\dot{\alpha}_0$ ):

$$C_1 = \frac{\dot{\alpha}_0}{n}; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = C_1 = \frac{\dot{\alpha}_0}{n}.$$

Тогда решение (11) примет вид

$$\alpha = \frac{\dot{\alpha}_0}{n} \sin nt; \quad \beta = -\frac{\dot{\alpha}_0}{n} \cos nt + \frac{\dot{\alpha}_0}{n}.$$

Исключив время, получим

$$A^2 + \left( \beta - \frac{\dot{\alpha}_0}{n} \right)^2 = \left( \frac{\dot{\alpha}_0}{n} \right)^2. \quad (12)$$

Для наглядного анализа пространственного движения гироскопа вводят понятие картинной плоскости  $P$ , которая является касательной к сфере единичного радиуса  $R = 1$  в т.  $a$  пересечения первоначального положения оси  $Oz$  с плоскостью  $P$  и называется апексом гироскопа. Для малых углов отклонения гироскопа  $\alpha$  и  $\beta$  дуги  $\check{\alpha} = \alpha R$  и  $\check{\beta} = \beta R$  примерно равны отрезкам  $ab = \vec{a} \approx \check{\alpha}$  и  $bc = \vec{\beta} \approx \check{\beta}$  (см. рис. 8, б).

Следовательно,  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  соответствуют  $\vec{\alpha}(t)$  и  $\vec{\beta}(t)$ . Пространственное движение оси  $Oz$  гироскопа можно изучать с помощью построения траектории апекса на картинной плоскости  $P$ . Проиллюстрируем анализ поведения гироскопа при нутации с помощью плоскости  $P$ .

Траектория апекса на картинной плоскости описывается уравнениями (12) окружности:

$$(\vec{\alpha})^2 + \left( \vec{\beta} - \frac{\dot{\alpha}_0}{n} \right)^2 = \left( \frac{\dot{\alpha}_0}{n} \right)^2,$$

т. е. ось гироскопа в инерциальном пространстве описывает конус с вершиной в т.  $O$  с высокой частотой  $n$  (частотой нута-

ции) и малым углом раствора конуса  $\alpha_H = \frac{2\dot{\alpha}_0 A}{H}$  (малой амплитудой колебаний  $0,5\alpha_H$ ).

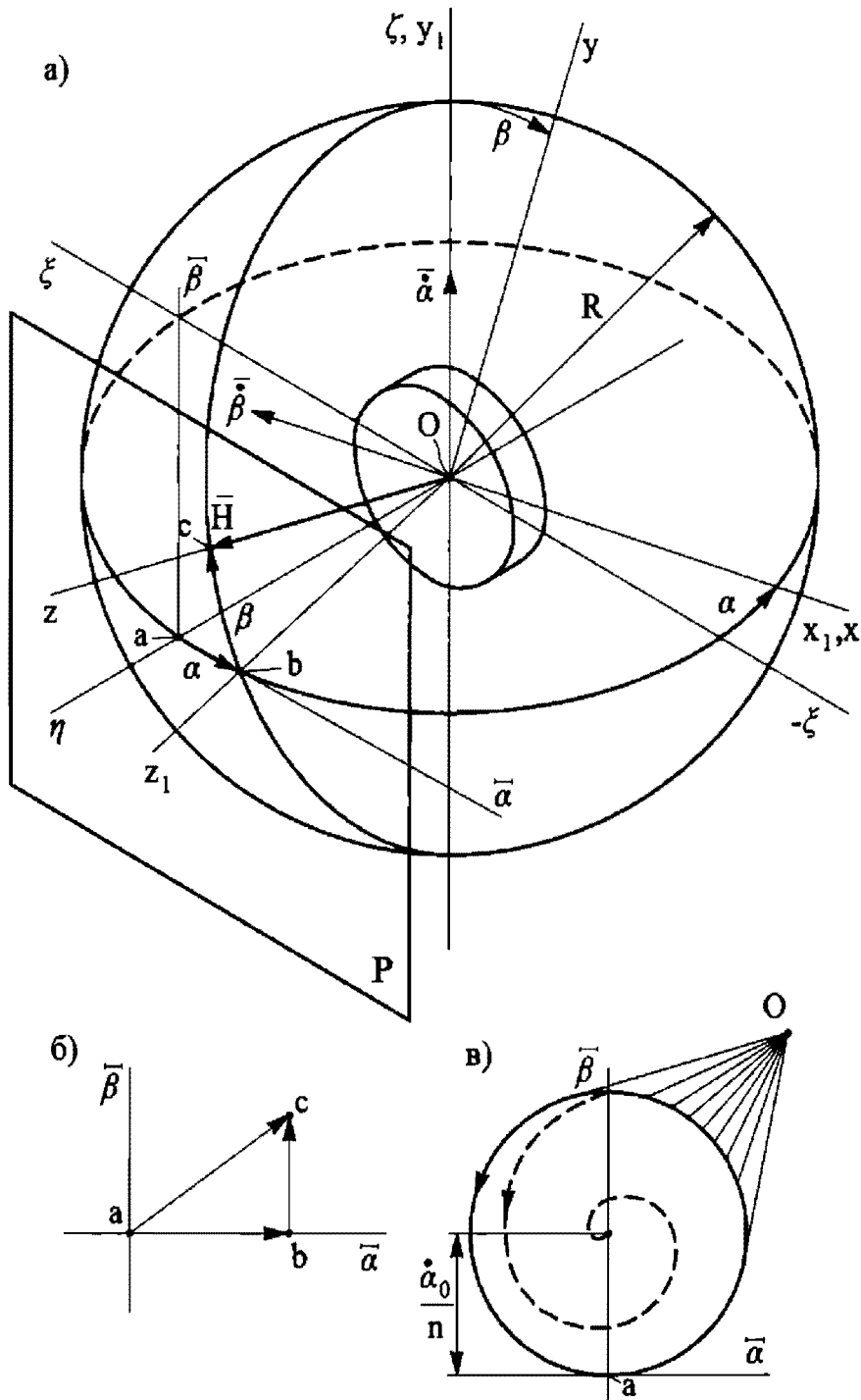


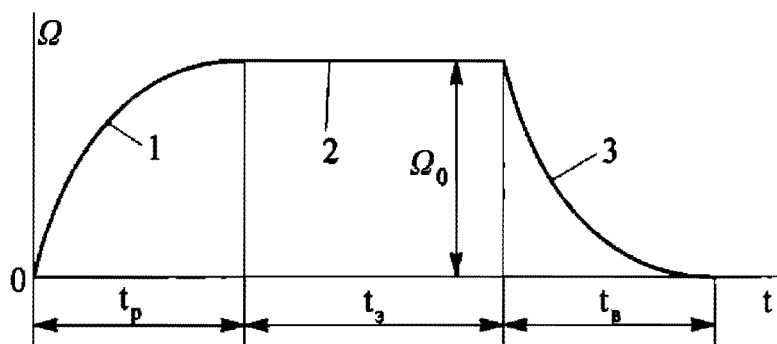
Рис. 8. Картинная плоскость  $P$

Частота нутации для гироскопов в кардановом подвесе при наиболее распространенном отношении  $\frac{C}{A} \approx 1,2$  равна  $n = \frac{C}{A} \Omega \approx 1,2 \Omega$ .

При  $C = A$ , например, для сферических гироскопов частота нутационных колебаний равна частоте вращения ротора, что недопустимо, так как возникают незатухающие колебания гироскопа (неустойчивость гироскопа). Поэтому необходимо обеспечить условие  $C > A$  либо ввести демпфирование колебаний с помощью устройств, создающих диссипативные моменты  $D_\alpha \dot{\alpha}$  и  $D_\beta \dot{\beta}$ , где  $D_\alpha$  и  $D_\beta$  — удельные демпфирующие моменты (или коэффициенты вязкого трения). Если подставить выражения  $D_\beta \dot{\beta}$  и  $-D_\alpha \dot{\alpha}$  в систему (9) и решить, то выражение для траектории апекса будет соответствовать архимедовой спирали. На рис. 8, в затухающая траектория апекса показана штриховой линией.

Особенно опасно, если частоты внешних возмущений при эксплуатации близки к нутационной частоте. Например, такие проблемы известны для гиросtabilизаторов головок самонаведения, динамически настраиваемых гироскопов и др.

Опасность возрастает в период запуска гиросприбора, когда  $\Omega(t)$  (рис. 9) невелико (кривая 1), а также при работе гироскопа на выбеге (кривая 3). Для гашения нутационных колебаний применяют различные механические устройства, вводят в контур управления специальные демпфирующие контуры.



**Рис. 9.** Зависимость угловой скорости ротора  $\Omega$  от времени  $t$ :  
 1 — разгон ротора за время  $t_p$ ; 2 — эксплуатация гироскопа при  $\Omega = \Omega_0 = \text{const}$ , за время  $t_э$ ; 3 — выбег ротора за время  $t_в$

При наличии внешних моментов (вынужденное движение гироскопа) характер движения оси  $Oz$  гироскопа меняется.

Пусть к гироскопу приложен момент  $M_x = \text{const}$ . Тогда система уравнений (9) принимает вид

$$\begin{aligned} -A\ddot{\beta} + H\dot{\alpha} &= M_x; \\ A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Найдем решение по  $\dot{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{M_x}{H} + C_1 \sin nt + C_2 \cos nt; \\ \ddot{\alpha} &= nC_1 \cos nt - nC_2 \sin nt; \\ \alpha &= \frac{M_x}{H}t - \frac{C_1}{n} \cos nt + \frac{C_2}{n} \sin nt + C_3. \end{aligned}$$

При нулевых начальных условиях  $C_1 = C_3 = 0$ ;  $C_2 = -\frac{M_x}{H}$ .

Определим угол  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -\frac{A\ddot{\alpha}}{H} = -\frac{\dot{\alpha}}{n}; \\ \beta &= -\frac{\alpha}{n} + C_4; \quad C_4 = 0; \\ \beta &= -\frac{M_x}{Hn}(1 - \cos nt) = -\beta_H(1 - \cos nt), \end{aligned}$$

где  $\beta_H = \frac{M_x A}{H^2}$  — нутационный бросок гироскопа под действием момента  $M_x$  в направлении действия этого момента.

Решение системы (13):

$$\alpha = \frac{M_x}{H}t - \beta_H \sin nt; \quad \beta = -\beta_H(1 - \cos nt).$$

На картинной плоскости траектория апекса — циклоида, определяемая прецессионным движением  $\frac{M_x}{H}$ , на которое накладываются нутационные колебания с амплитудой  $\beta_H$ . При введении диссипативных моментов  $-D_\alpha \dot{\alpha}$  и  $D_\beta \dot{\beta}$  нутация затухает и траектория становится прямой. При этом гироскоп прецессирует со скоростью  $\frac{M_x}{H}$ , а по оси  $Ox$  устанавливается динамическое равенство гироскопического  $H\dot{\alpha}$  и внешнего  $M_x$  моментов.

Нутационный бросок можно трактовать как наличие виртуальной упругой связи гироскопа с инерциальным пространством:

$$M_x = K_{\text{пр}}\beta_n,$$

где  $K_{\text{пр}} = -H^2/A = Hn$  — угловая приведенная жесткость упругой связи.

Наличие нутационного броска учитывают только при расчете прецизионных систем, например при анализе точности суперпрецизионного стенда для испытаний гироскопов; обычно  $\beta_n < 1''$ .

Наличие карданова подвеса, нежесткость конструкции крепления ротора при наличии угла  $\beta \neq 0$  снижают частоту нутации.

При  $\beta = \beta_0$  частота нутации гироскопа в кардановом подвесе

$$n_k = \frac{H \cos \beta_0}{\sqrt{A_0 B_0}},$$

где  $A_0 = A + A_1$  — приведенный момент инерции гироузла ( $A_1$  — момент инерции внутренней рамки (кожуха) относительно оси  $Ox$ );  $B_0 = A_2 + (A + B_1)\cos^2\beta + C_1\sin^2\beta$  — приведенный момент инерции гироскопа в кардановом подвесе относительно оси  $Oy_1$  ( $A_2$  — момент инерции наружной рамы относительно  $Oy_1$ ;  $B_1$  — момент инерции внутренней рамки относительно  $Oy$ ;  $C_1$  — момент инерции внутренней рамки относительно  $Oz$ ).

Нежесткость конструкции снижает частоту нутации в зависимости от качества спроектированной конструкции:  $n'_k \approx (0,60 \dots 0,85)n_k$ . Значение  $n'_k$  гироприбора может существенно отличаться от  $n = \frac{H}{A}$ ,  $n'_k \approx (0,4 \dots 0,7)n$ .

Нутация гироскопа быстро затухает под действием диссипативных моментов, поэтому часто рассматривают (для гирополукомпасов, гировертикалей и др.) только укороченные уравнения гироскопа, пренебрегая моментами инерции  $A\ddot{\beta}$ ,  $A\ddot{\alpha}$  в системе (9):

$$\begin{aligned} H\dot{\alpha} &= M_x; \\ H\dot{\beta} &= M_{y_1}. \end{aligned} \tag{14}$$

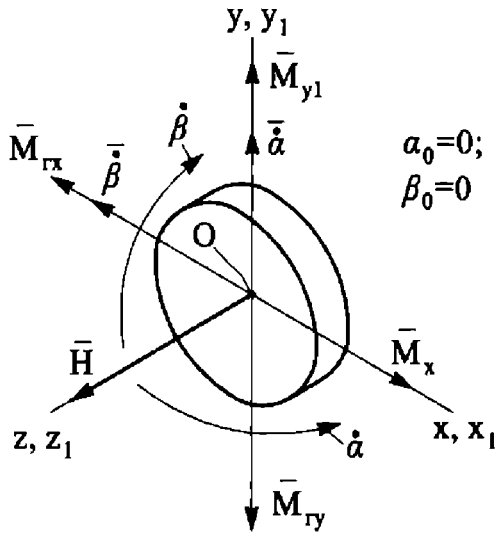


Рис. 10. Прецессия трехстепенного гироскопа

Из уравнений (14) следует, что внешние моменты уравновешиваются гироскопическими (рис. 10). При отсутствии внешних моментов  $\dot{\alpha} = 0$ ,  $\dot{\beta} = 0$ ,  $\alpha_0 = \text{const}$ ,  $\beta_0 = \text{const}$ , т. е. трехстепенной гироскоп сохраняет первоначальное положение в инерциальном пространстве (1-е свойство). Следовательно, его можно использовать как базовую (опорную) СК на подвижном объекте для измерения его углов ориентации. При малом  $\beta$  и наличии внешних моментов

$M_z = M_{y1}$  и  $M_x$  возникают угловые скорости  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\beta}$  (прецессия гироскопа, см. рис. 10):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{M_x}{H}; \\ \dot{\beta} &= \frac{M_{y1}}{H}. \end{aligned} \tag{15}$$

Гироскоп прецессирует таким образом, что вектор  $\bar{H}$  стремится совместиться с вектором внешнего момента  $\bar{M}$  кратчайшим путем. При этом вокруг осей приложения моментов возникает динамическое равновесие (14): внешние моменты уравновешиваются гироскопическими. Прецессионное движение происходит вокруг осей, перпендикулярных к действующим моментам.

Если внешние моменты — вредные (возмущающие) моменты, вызванные наличием моментов сил трения, разбалансировки и т. п., то угловые скорости  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  называют собственной скоростью прецессии, скоростью ухода (или дрейфа).

Свойство прецессии (15) используют и для управления гироскопом, прикладывая вокруг осей подвеса управляющие моменты  $\bar{M}_x^{\text{упр}}$  и  $\bar{M}_{y1}^{\text{упр}}$  с помощью датчиков момента. Датчик момента может быть магнитно-электрическим, индукцион-

ным и др. На рис. 11, а датчики момента  $DM_{y_1}$  и  $DM_x$  изображены условно в виде цилиндров. На рис. 11, б в качестве примера показана схема магнитно-электрического датчика момента. Момент  $\bar{M}_x^{упр}$  создается при взаимодействии постоянного магнита и поля катушки ДМ при прохождении по ней тока  $i_{DM}$ :  $\bar{M}_x^{упр} = K_{DMx} i_{DM}$ , где  $K_{DMx}$  — крутизна характеристики ДМ.

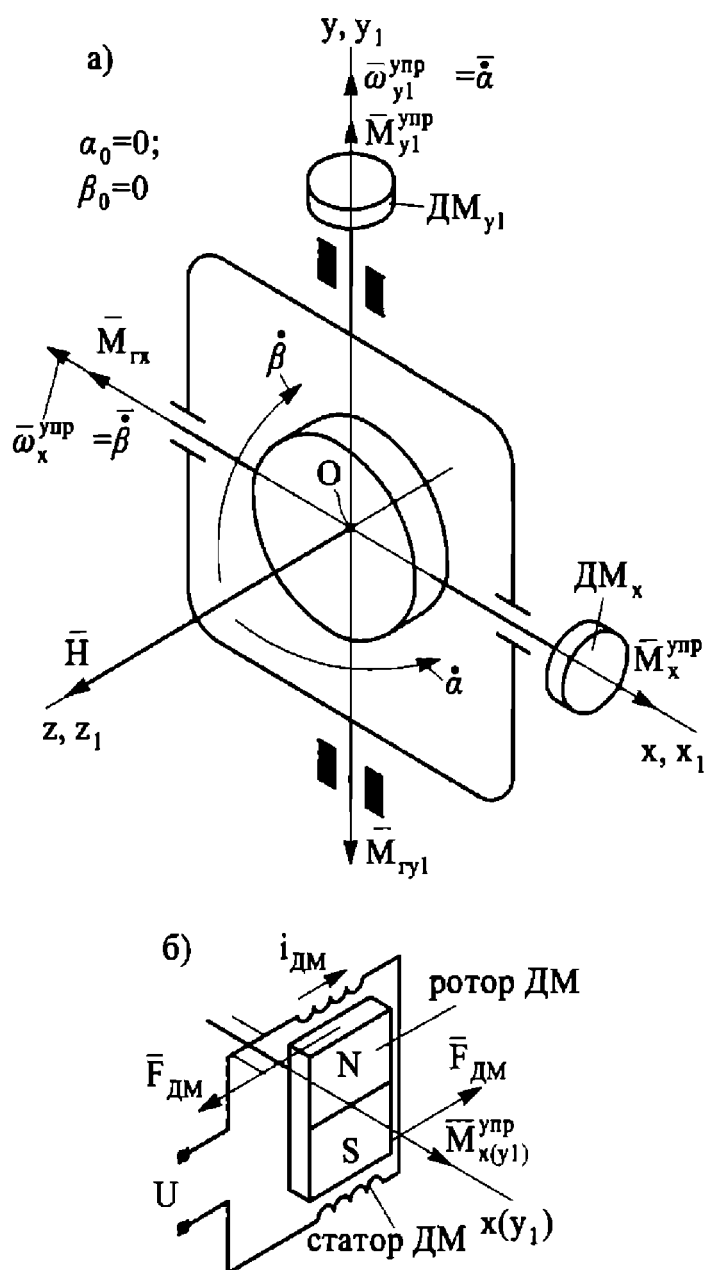


Рис. 11. Управление трехступенным гироскопом:

а — трехступенной гироскоп с датчиками момента  $DM_{y_1}$  и  $DM_x$ ; б — конструктивная схема датчика момента



Аналогично для оси  $Oy_1$ :  $M_{y_1}^{\text{упр}} = K_{\text{ДМ}} i_{\text{ДМ}}$ . Угловые скорости управления гироскопом — скорости прецессии гироскопа под действием управляющих моментов:

$$\omega_{y_1}^{\text{упр}} = \frac{M_x^{\text{упр}}}{H}; \quad \omega_x^{\text{упр}} = \frac{M_{y_1}^{\text{упр}}}{H}. \quad (16)$$

Отметим, что  $\bar{M}_x$ , действующий вокруг оси  $Ox$ , вызывает движение гироскопа вокруг перпендикулярной к  $\bar{M}_x$  оси  $Oy_1$ ,  $\bar{\alpha} \perp \bar{M}_x$  аналогично  $\bar{\beta} \perp \bar{M}_{y_1}$ , т. е. работа прецессии равна нулю.

Уравнения (9) показывают эффективное сопротивление гироскопа внешним моментам за счет гироскопических моментов, которые возрастают с увеличением  $H$ .

При исчезновении внешних моментов  $\omega_e = 0$  ( $\dot{\alpha} = 0$ ,  $\dot{\beta} = 0$ ) прецессия прекращается (с точностью «до нутации») и гироскоп остается в неизменном положении относительно инерциального пространства:  $\alpha'_0 = \text{const}$ ,  $\beta'_0 = \text{const}$ .

Сравним поведение гироскопа с движением обычного твердого тела ( $H = 0$ ). Внешний момент  $M_x$  уравнивается инерционным:  $M_x = A\dot{\omega}_x$  ( $\dot{\omega}_x$  — угловое ускорение ротора при  $\Omega = 0$  относительно оси  $Ox$ ). При  $M_x = 0$  твердое тело будет двигаться по инерции с угловой скоростью  $\omega_x = \text{const}$  (для гироскопа  $M = 0$ ,  $\omega_e = 0$ ).

Можно сказать, что прецессия гироскопа есть безынерционное движение, отсюда в том числе удобство управления гироскопом. Гироскопические моменты уравнивают управляющие моменты  $H\dot{\alpha} = M_x^{\text{упр}}$ ,  $H\dot{\beta} = M_{y_1}^{\text{упр}}$ . Если заданы скорости управления  $[\omega_{y_1}^{\text{упр}}]$ ,  $[\omega_x^{\text{упр}}]$ , то  $M_{y_1}^{\text{упр}} = H[\omega_x^{\text{упр}}]$ ;  $M_x^{\text{упр}} = H[\omega_{y_1}^{\text{упр}}]$ .

При исчезновении управляющего момента гироскоп мгновенно (с точностью «до нутации») останавливается.

С помощью управляющих (корректирующих) моментов гироскопом реализуется базовая СК (географическая, ортодромическая и др.), связанная с Землей, что позволяет определить углы положения объекта относительно неинерциальных СК.

Выше выполнен анализ уравнений (14) при  $\beta = 0$ . Однако при расчете погрешности гироскопа, систем управления гироскопа

скопом необходимо учитывать, что при больших  $\beta$  снижается эффективное сопротивление гироскопа внешним моментам.

Дополним систему (8) проекцией момента  $\bar{M}_{y_1} = \bar{M}_y + \bar{M}_{z_1}$  на ось  $Oy$  при  $\beta \neq 0$  с учетом реальных физических связей в кардановом подвесе. На рис. 12 показан карданов подвес со стороны оси  $-Ox$ .

Составляющая  $\bar{M}_{z_1}$  уравновешивается реакциями опор карданова подвеса  $\bar{M}_R$  и не влияет на движение гироскопа (с невесомыми рамками). Момент  $M_y = \frac{M_{y_1}}{\cos \beta}$  действует на гироскоп. Поэтому при принятых допущениях и  $\beta \neq 0$  прецессионные уравнения движения гироскопа (14) с учетом (7) принимают вид

$$\begin{aligned} H \dot{\alpha} \cos \beta &= M_x; \\ H \dot{\beta} \cos \beta &= M_{y_1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Величину  $H \cos \beta = H_3$  называют эффективной составляющей кинетического момента. Скорость прецессии гироскопа  $\dot{\alpha} = \frac{M_x}{H_3}$ ;  $\dot{\beta} = \frac{M_{y_1}}{H_3}$ , т. е. возрастает с увеличением  $\beta$ .

Погрешность гироскопа характеризуется средней угловой скоростью отклонения его оси в инерциальном пространстве (скорость дрейфа, скорость ухода, собственная скорость прецессии):

$$\omega_{др} = \frac{[\alpha]}{t}, \quad (18)$$

где  $[\alpha]$  — измеренный угол отклонения гироскопа (обычно при испытаниях его значение задается);  $t$  — время измерения.

В большинстве случаев  $\omega_{др}$  определяется вредными (возмущающими) моментами  $M_{вр}$ , действующими вокруг осей подвеса гироскопа (при  $\beta = 0$ ):

$$\omega_{др} = \frac{M_{вр}}{H}. \quad (19)$$

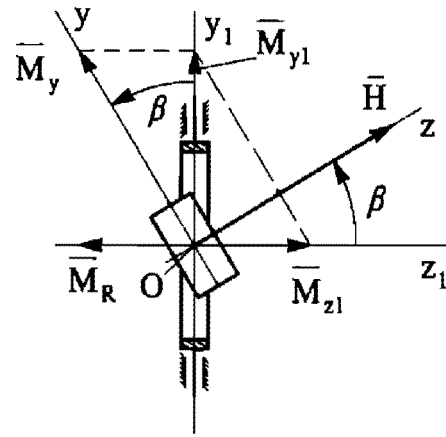
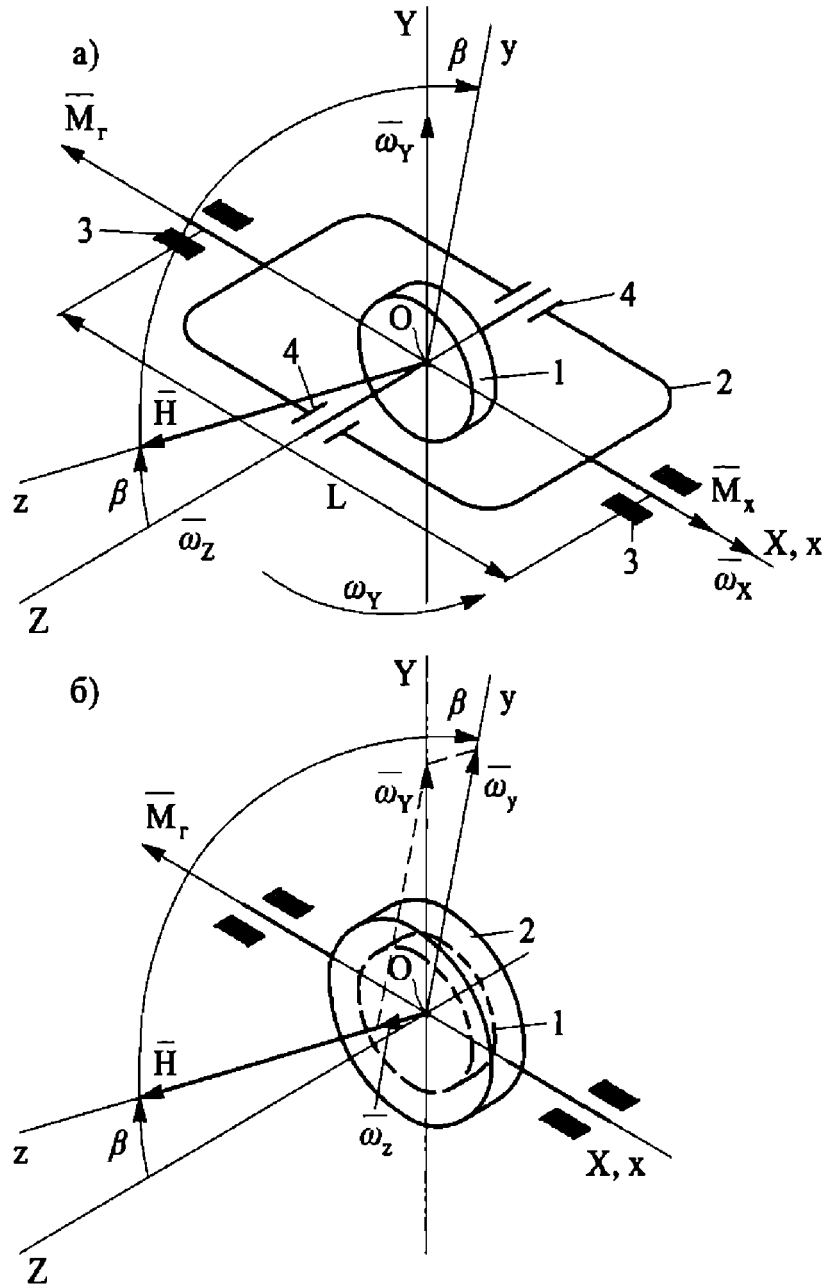


Рис. 12. К определению проекции момента  $\bar{M}_{y_1}$  на ось  $Oy$

Это позволяет перейти к разработке моделей погрешностей гироскопа в зависимости от условий эксплуатации. Удельные составляющие модели погрешности указывают в паспорте giroприбора. При этом огромную роль играет выбор модели погрешности гироскопа [2].

Гироскоп, ротор которого имеет две степени свободы, называется двухстепенным (рис. 13). Потеря степени свободы,



**Рис. 13.** Схемы двухстепенного гироскопа:  
 а — ротор 1 в открытой рамке 2; б — ротор 1 в закрытом кожухе 2

очевидно, «лишает» его свойства трехстепенного гироскопа — сохранения положения оси собственного вращения ( $\vec{H}$ ) в инерциальном пространстве. Вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\Omega = \text{const}$  ротор 1 в подшипниках 4 (главная опора гироскопа) помещен в рамку 2, которая установлена на опорах 3 (чувствительных опорах гироскопа).

Если гироскоп установлен на основании (объекте), вращающемся с угловой скоростью  $\vec{\omega}_y$ , то ротор 1 двухстепенного гироскопа поворачивается вместе с рамкой 2 (кожухом) со скоростью  $\vec{\omega}_y$ , которая является переносной угловой скоростью ( $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_y$ ) гироскопа в инерциальном пространстве (оси СК  $OXYZ$  связаны с корпусом). Наличие переносной угловой скорости приводит к появлению гироскопического момента  $M_r$ , который действует вокруг оси  $Ox$  (оси  $Oxyz$  связаны с внутренней рамкой). Пусть в начальный момент времени  $\vec{H} \perp \vec{\omega}_y$  (рис. 14, а). Тогда гироскопический момент  $M_r = H\omega_y$  вызовет отклонение гироскопа (вокруг оси  $Ox$ ) из его первоначального положения — появится угол  $\beta$ .

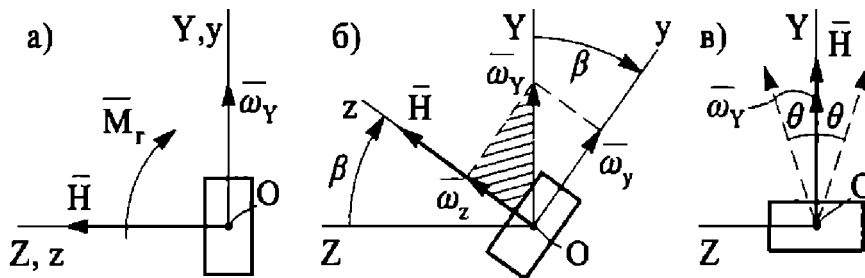


Рис. 14. К анализу поведения двухстепенного гироскопа на основании, вращающемся с угловой скоростью  $\vec{\omega}_y$ :

$$a - \beta = 0; б - \beta \neq 0; в - \beta \rightarrow \pi/2$$

При появлении  $\beta$  (рис. 14, б) гироскопический момент  $M_r = H\omega_y \cos \beta$  начинает уменьшаться, при  $\beta = \pi/2$   $M_r = 0$ , т. е.  $\vec{H}$  совместится (рис. 14, в) с  $\vec{\omega}_y$  (кратчайшим путем). Это положение гироскопа является устойчивым, при отклонении вектор  $\vec{H}$  гироскопа стремится совместиться с  $\vec{\omega}_y$  (основное свойство двухстепенного гироскопа).

Таким образом, если гироскоп установлен на основании, вращающемся с угловой скоростью  $\vec{\omega}_e$  в инерциальном пространстве, то вектор собственного кинетического момента  $\vec{H}$

стремится кратчайшим путем к совмещению с  $\bar{\omega}_e$  под действием гироскопического момента  $\bar{M}_r = \bar{H}x\bar{\omega}_e$ .

Отметим, что положение равновесия  $\beta = \pi/2$  гиروزел «пройдет» по инерции, допустим, на некоторый угол  $\theta$ , тогда возникнет гироскопический момент  $H\omega_e \sin \theta$ , который возвратит гироскоп в положение устойчивого равновесия, которое гироскоп вновь «пройдет» и повернется на угол  $-\theta$  и т. д., т. е. гироскоп относительно оси  $OY$  будет совершать автоколебания. Под действием диссипативных моментов эти колебания затухают.

При наличии возмущающих моментов  $M_x$  возникает зона «нечувствительности», в которой гироскопический момент  $M_r = H\omega_{Y\min} \cos \beta$  не может преодолеть момент  $M_x$ , следовательно, порог чувствительности  $\omega_{Y\min}$  определяется выражением

$$H\omega_{Y\min} \cos \beta = M_x.$$

При  $\beta \rightarrow 0$

$$\omega_{Y\min} = \frac{M_x}{H}. \quad (20)$$

Выражение (20) соответствует формуле скорости дрейфа трехстепенного гироскопа.

Разложим вектор  $\bar{\omega}_Y = \bar{\omega}_y + \bar{\omega}_z$ .

Составляющая  $\omega_z = \omega_Y \sin \beta$  изменяет абсолютную скорость вращения ротора  $\Omega_z = \Omega + \omega_Y \sin \beta$ , но  $\Omega \gg \omega_Y \sin \beta$ , поэтому можно считать  $H = C\Omega_z \approx C\Omega = \text{const}$ . Составляющая  $\omega_y = \omega_Y \cos \beta$  является причиной появления гироскопического момента  $M_r = H\omega_Y \cos \beta$ , ось  $Oy$  называют осью чувствительности двухстепенного гироскопа.

Рассмотрим случай вращения объекта вокруг трех осей СК  $OXYZ$  с угловыми скоростями  $\bar{\omega}_Y, \bar{\omega}_Z, \bar{\omega}_X$  (см. рис. 13, а). При  $\beta \neq 0$  гироскопический момент  $M_r = H\omega_Y \cos \beta - H\omega_Z \sin \beta$  и устойчивое положение гироскопа — по направлению вектора  $\bar{\omega}_{ZY} = \bar{\omega}_e = \bar{\omega}_Z + \bar{\omega}_Y$ . Гироскопический момент  $H\omega_X$  нагружает опоры 3 гиروزла и уравнивается моментом сил  $F_R$  реакций опоры  $M_R = LF_R$ , где  $L$  — расстояние между двумя подшипниками. Реакции опор возрастают с увеличением  $\omega_X$ :  $F_R = \frac{H}{L}\omega_X$ .

Двухстепенной гироскоп является базой для построения двухстепенных гирокомпасов, датчиков угловых скоростей, гиротахометров, указателей поворота, интегрирующих гироскопов и др. Рассмотрим принцип работы двухстепенных гироскопов Фуко I и II рода.

Гироскоп Фуко I рода представляет собой двухстепенной гироскоп, у которого ось  $Ox$  гиросузы направлена по вертикали  $O\xi_r$ , а ось  $Oz$  находится в горизонтальной плоскости  $\eta_r O\xi_r$ . На рис. 15 внутренняя рамка изображена в виде закрытого кожуха 2, внутри которого вращается ротор 1. Горизонтальная составляющая суточного вращения Земли  $\omega_e = U \cos \varphi$  является причиной возникновения гироскопического момента  $M_r = H\omega_e \sin \beta = = HU \cos \varphi \sin \beta$ , где  $\beta$  отсчитывается от направления  $O\eta_r$  (направления на север). Устойчивое положение гироскопа — при  $\beta = 0$ , т. е. вектор  $\bar{H}$  в положении равновесия направлен на север. Гироскоп может быть основой для построения двухстепенного гирокомпаса (ГК) при наличии датчика 4 угла (ДУ) и системы демпфирования 3 для гашения автоколебаний (см. свойства двухстепенного гироскопа) гиросузы.

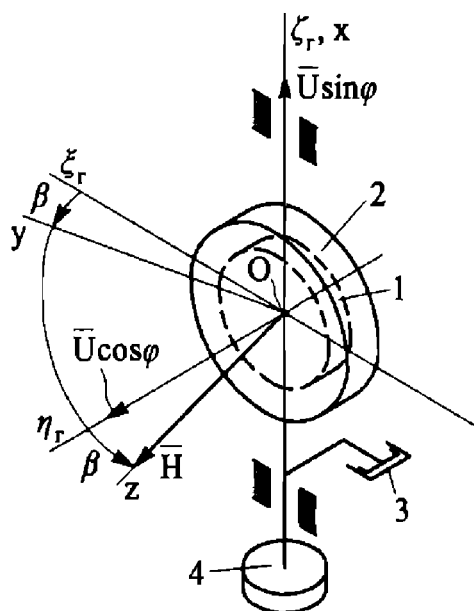


Рис. 15. Схема двухстепенного ГК

Сведение к минимуму возмущающих моментов, действующих вокруг оси  $Ox$  гиросузы, — одна из основных задач создания прецизионного ГК.

Распространена схема двухстепенного поплавкового ГК, в соответствии с которой внутренняя рамка выполняется в виде герметичного поплавка, помещенного в жидкость. Внутри поплавка в газовой среде вращается ротор. В этом случае опоры гиросузы (магнитные, камневые или упругие) разгружены архимедовой силой и моменты  $M_x$  минимальны.

При включении ГК возникают медленно затухающие колебания гироузла вокруг оси  $Oz_r$  ( $Ox$ ), т. е.  $\bar{H}$  совершает колебания относительно направления на север (при  $M_x = 0$ ).

Чтобы сократить время определения направления на север, используют фиксацию точек 1, 2, 3, ... «реверсии» переходного процесса ГК (рис. 16), т. е. фиксацию максимальных отклонений оси ГК при колебании гироузла. Рассчитывают направление на север по положению середин отрезков (1)—2; (2)—3; (3)—4 и т. д., применяя соответствующий алгоритм обработки информации.

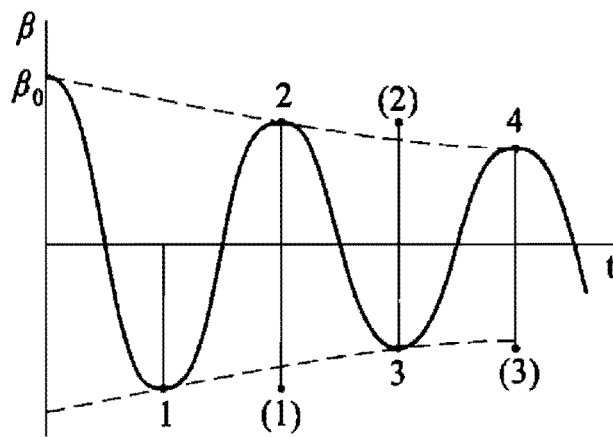


Рис. 16. Переходный процесс ГК

Наличие возмущающего момента  $\bar{M}_x$  является причиной погрешности измерения:

$$\begin{aligned}
 HU \cos \varphi \sin \beta_{\min} &\geq M_x, \\
 \beta_{\min} &\approx \frac{M_x}{HU \cos \varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Двухстепенной ГК имеет массивный корпус, который помещают на неподвижное массивное основание. Двухстепенной ГК применяют в маркшейдерском деле, для начальной выставки баллистических ракет, танковых и артиллерийских систем.

Рисунок 17 наглядно иллюстрирует невозможность применения ГК с подвижным основанием. Вектор  $\bar{H}$  устанавливается по направлению  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_\eta + \bar{\omega}_{\text{осн}}$ , где  $\omega_\eta = U \cos \varphi$ ;  $\omega_{\text{осн}}$  — угловая скорость основания. В этом случае ГК будет иметь не-

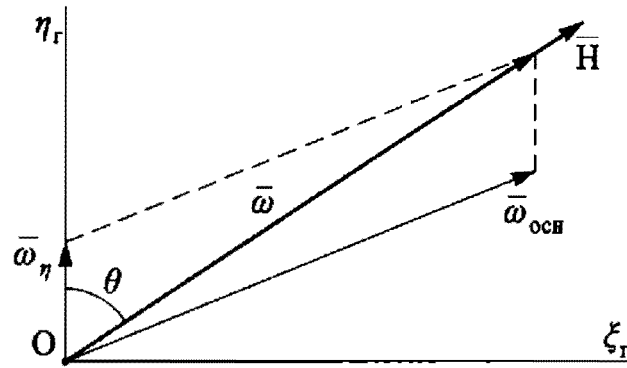


Рис. 17. К определению направления  $\bar{N}$  при наличии угловой скорости  $\bar{\omega}_{\text{осн}}$  основания, на котором установлен ГК

допустимую погрешность  $\theta$ , т. е. двухстепенной ГК можно использовать только на неподвижном основании ( $\omega_{\text{осн}} = 0$ ).

Гирискоскоп Фуко II рода называют двухстепенным гирискоскопом, ось  $Ox$  рамки (гиросузда) которого расположена в горизонтальной плоскости перпендикулярно к плоскости меридиана ( $Ox \perp \eta_r O\zeta_r$ ).

Вектор  $\bar{N}$  под действием гироскопического момента  $HU \sin \beta$  (рис. 18) стремится совместиться с вектором угловой скорости  $\bar{U}$  суточного вращения Земли. По направлению вектора  $\bar{N}$  в положении устойчивого равновесия, направленного параллельно  $\bar{U}$ , определяют широту места  $\varphi$ .

Если на оси гиросузда поместить датчик угла и ввести демпфирование, то можно снимать информацию по широте  $\varphi$ , т. е.

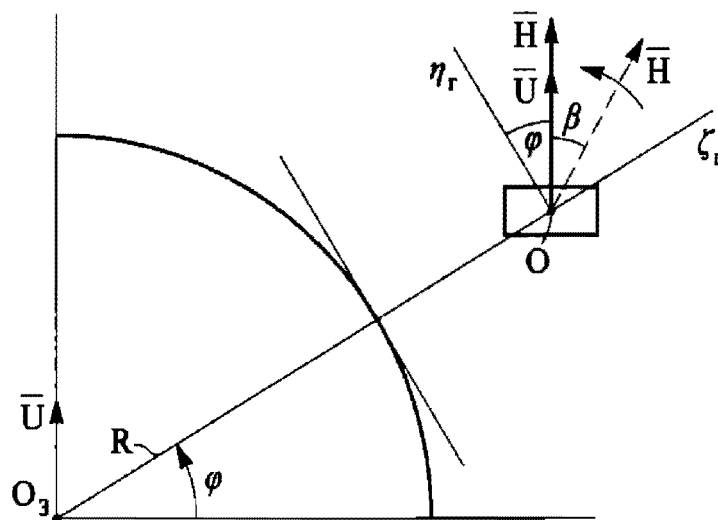


Рис. 18. Схема измерения широты  $\varphi$  с помощью гироскопа Фуко II рода



гироскоп Фуко II рода может быть базой для построения гироскопа Фуко (ГШ). По конструкции ГШ аналогичен ГК, однако появляется серьезная трудность первоначальной выставки прибора относительно плоскости меридиана. В настоящее время созданы прецизионные ГШ, получившие практическое применение.

При наличии упругой связи 3 оси гиروزла двухстепенного гироскопа с корпусом (рис. 19) гироскопический момент  $M_g$  уравнивается упругим моментом  $M_{упр} = K\beta$ :

$$H\omega_e \cos \beta = K\beta,$$

где  $K$  — приведенная угловая жесткость упругой связи 3.

Тогда

$$\beta_* \approx \frac{H}{K} \omega_e, \quad (22)$$

т. е. угол  $\beta_*$  поворота гироскопа является мерой угловой скорости основания. Для успокоения колебаний гироскопа применяют демпфирующее устройство 4. Выходной сигнал  $U_{вых} = K_{ДУ}\beta = \frac{HK_{ДУ}\omega_e}{K}$  снимается с помощью датчика угла 5 (здесь  $K_{ДУ}$  — крутизна выходной характеристики ДУ).

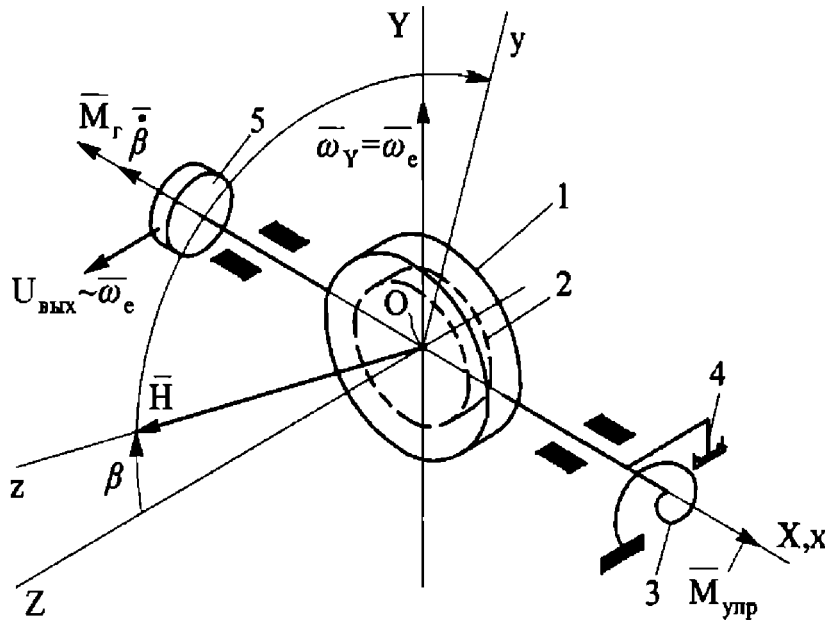


Рис. 19. Схема двухстепенного гироскопа, имеющего упругую связь с корпусом (датчик угловой скорости)

Такие гироскопы, называемые датчиками угловой скорости (ДУС), гиротаксметрами, дифференцирующими гироскопами, служат для измерения угловой скорости объекта, на котором они установлены.

Для повышения точности ДУС применяют поплавковую конструкцию прибора, в котором гиросзел выполнен в виде поплавка (рис. 20). Ротор гироскопа вращается в газовой атмосфере (5 % He, 95 % H<sub>2</sub>). Архимедова сила  $G_a$  разгружает опоры гиросзела, в качестве которых применяют камневые или виброопоры, магнитные подвесы с малым возмущающим моментом.

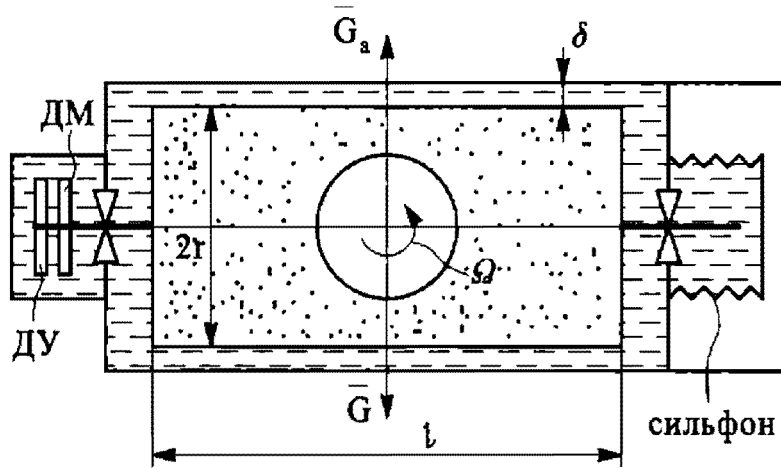


Рис. 20. Схема поплавкового гироскопа

Если гироскопический момент уравнивается только демпфирующим моментом  $M_D = D\dot{\beta}$ , то двухстепенной гироскоп становится интегрирующим гироскопом (ИГ):

$$H\omega_e \cos \beta = D\dot{\beta},$$

где  $D$  — коэффициент демпфирования (удельный демпфирующий момент).

При малых  $\beta$  и нулевых начальных условиях

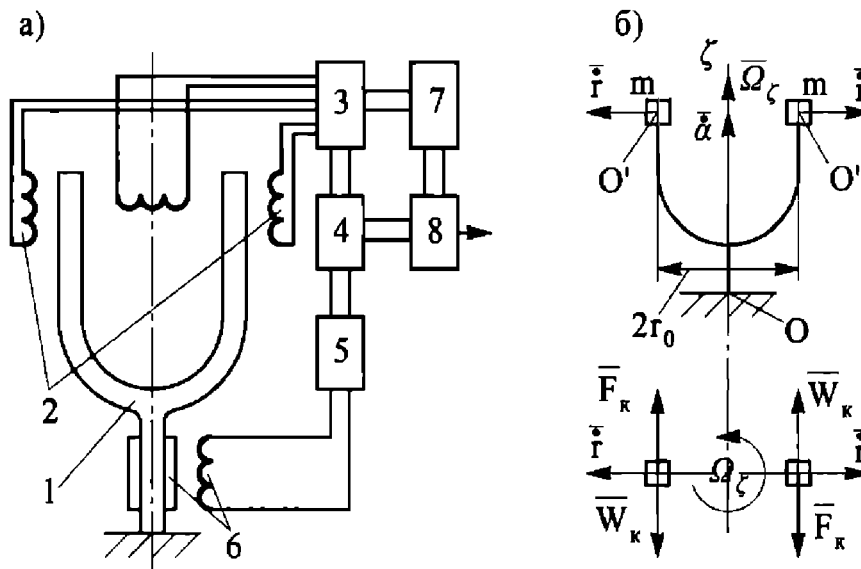
$$\dot{\beta} = \frac{H}{D}\omega_e; \quad \beta = \frac{H}{D} \int \omega_e dt = \frac{H}{D}\psi; \quad U_{\text{вых}} = K_{\text{ДУ}}\beta = \frac{HK_{\text{ДУ}}}{D}\psi, \quad (23)$$

где  $\psi$  — угол поворота объекта вокруг оси  $Oz$ .

Как правило, ИГ выполняют в виде поплавкового прибора с малым зазором  $\delta$  (см. рис. 20) для увеличения демпфирующего момента.

Большие массогабаритные характеристики, высокая стоимость, большое время готовности, недостаточный срок службы являются существенными недостатками гироприборов с быстровращающимся ротором.

В 60-х годах XX в. начинается интенсивный поиск построения гироскопов на иных физических принципах (камертонные, оптические, волновые твердотельные, микромеханические и др.). Одной из первых явилась конструктивная схема камертонного вибрационного гироскопа (рис. 21).



**Рис. 21.** Схема камертонного гироскопа:

1 — камертон; 2 — система возбуждения колебаний лепестков камертона; 3 — преобразователь фаз; 4, 5 — усилители; 6 — тензодатчик; 7 — блок управления; 8 — преобразователь информации

Лепестки 1 гироскопа приводятся в колебания в противофазе с относительной скоростью  $V_r = V_0 \cos vt$ . При наличии переносной угловой скорости  $\bar{\omega}_e = \bar{\Omega}_z$  основания возникает кориолисово ускорение  $W_k = 2\omega_e V_r$  приведенных масс  $m$  и соответствующие кориолисовы силы  $F_k = mW_k$  инерции, которые создают момент  $M = mLW_k = 2mL\omega_e V_0 \sin vt$ , уравновешиваемый упругим моментом торсиона  $M_{упр} = K\beta$ , где  $K$  — приведенная жесткость торсиона. Угол  $\beta$  «закрутки» торсиона фиксируется датчиком угла (пьезо-, тензо- или емкостным датчиком, оптическим устройством и др.):

$$U_{\text{вых}} = K_{\text{ДУ}}\beta = \frac{2mLV_0K_{\text{ДУ}}}{K}\omega_e \sin vt.$$

Вводя синусное преобразование сигнала (умножение на  $\sin vt$ ), выделяют его постоянную составляющую ( $\sin^2 vt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2vt$ ):

$$U_{\text{вых}} = h\omega_e, \quad (24)$$

где  $h = mLV_0K_{\text{ДУ}}K^{-1}$  — чувствительность прибора.

Таким образом, гироскоп работает в режиме ДУС.

Пусть амплитуда  $a$  колебаний  $a\cos vt$  центра масс с частотой  $v$  удовлетворяет условию  $a \ll r_0$ , относительная скорость центра масс  $\dot{r} = av \sin vt$ .

Уравнение движения камертона относительно оси  $O\zeta$  имеет вид

$$B(\ddot{\alpha} + \dot{\Omega}) + D\dot{\alpha} + K\alpha = 4mr_0av\Omega \sin vt, \quad (25)$$

где  $B \approx 2mr_0^2$  — приведенный момент инерции камертона относительно оси  $O\zeta$ ;  $D$  — удельный демпфирующий момент, вызванный конструкционным демпфированием ножки камертона, силами вязкого сопротивления (газодинамическими, магнитными и др.), трением в заделке ножки камертона;  $K$  — приведенная жесткость ножки (торсиона);  $\dot{\Omega}$  — угловое ускорение основания прибора.

Преобразуем выражение (25) к стандартному виду при  $\dot{\Omega} = 0$ :

$$\ddot{\alpha} + 2\xi\omega_0\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = A\Omega \sin vt, \quad (26)$$

где  $A = \frac{4mr_0av}{B}$ ;  $\omega_0^2 = \frac{K}{B}$  — квадрат собственной частоты незатухающих колебаний;  $\xi = \frac{D}{2\omega_0B}$  — относительная степень затухания колебаний.

Решение (26) имеет вид  $\alpha = \lambda \frac{A}{\omega_0^2} \Omega \sin(vt - \delta)$ .

Для дорезонансного случая при  $v \ll \omega_0$ ,  $\lambda \approx 1$ ,  $\delta = 0$

$$\alpha = \frac{A}{\omega_0^2} \Omega \sin vt = \frac{4mr_0av}{K} \Omega \sin vt. \quad (27)$$

Выражение (27) после преобразований соответствует виду (24).

В случае резонанса при  $\lambda = \frac{1}{2\xi} = \frac{\omega_0 B}{D}$ ,  $\delta = \frac{\pi}{2}$

$$\alpha = -\frac{B}{D} \frac{A}{\omega_0} \Omega \cos vt = -\frac{2mr_0 a v}{\xi K} \Omega \cos vt. \quad (28)$$

Сравнение выражений (27) и (28) показывает более высокую чувствительность прибора резонансного режима работы камертонного гироскопа ( $\xi < 0,5$ ). Введя косинусное преобразование сигнала и выделив постоянную составляющую сигнала  $\alpha^*$ , получим  $U_{\text{вых}} = K_{\text{ДУ}} \alpha^* = K_{\text{ДУ}} \frac{mr_0 a v}{\xi K} \Omega$ , где  $K_{\text{ДУ}}$  — коэффициент датчика угла, или крутизна выходной характеристики ДУ по напряжению.

Попытка создать камертонный гироскоп в 1960-е годы (см. рис. 21) потерпела провал; при больших массогабаритных характеристиках (масса камертона  $> 1,5$  кг) погрешность измерения достигала  $> 10^3$  °/ч. Основные причины — это невозможность получения стабильного значения  $\xi$ , которое определялось конструкционным демпфированием металлических лепестков (ножек) камертона, нестабильная жесткость  $K$  и др. Интересно, что в этот момент из США пришла информация о создании такого прибора, который даже получил название «Золотой комар» (впоследствии оказалось, что сведения были ложными).

Принцип работы камертонного гироскопа осуществлен только в микромеханических гироскопах (МГ), построенных с применением кремниевой технологии. Чувствительным элементом таких гироскопов является вибрирующая консольно-закрепленная кремниевая масса (балка), и по принципу действия МГ подобен камертонному гироскопу.

Один из первых КГ был создан в лаборатории Драйпера (МТИ США). Камертон из пьезоэлектрика возбуждается электростатическим «гребенчатым» приводом; съём информации — емкостный; габариты корпуса:  $12,5 \times 8,5 \times 12,5$  мм; чувствительность  $(25 \pm 2,5)$  МВ/°/с, линейность 0,5 %; диапазон измерения  $\pm 300$  °/с).

В отличие от роторных гироскопов (с быстровращающимся ротором) вибрационные камертонные гироскопы относят к классу осцилляторных. Развитие идеи создания осциллятор-

ных вибрационных гироскопов нашло отражение в разработке вибрационных рамочных волновых твердотельных гироскопов (балочных, рамочных и др.), получивших широчайшее применение в начале XXI в.

Одним из первых серийных гироскопов, у которого отсутствует быстро вращающийся ротор, явился вибрационный рамочный гироскоп (ВРГ). Его схема показана на рис. 22.

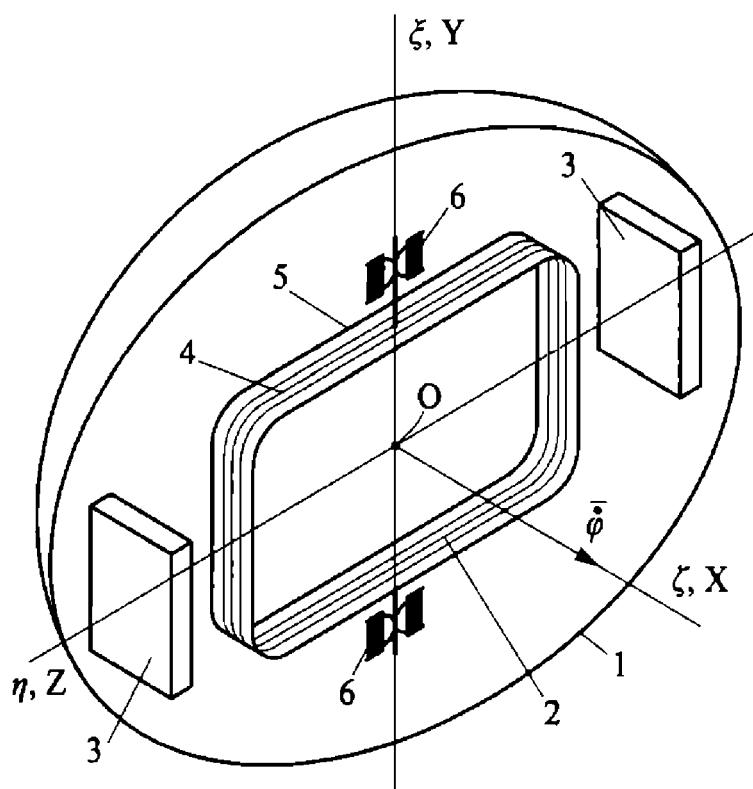


Рис. 22. Схема ВРГ

Чувствительным элементом ВРГ является латунная рамка 4 с обмоткой 5; 2 и 3 — элементы магнитной системы. Рамка имеет возможность поворота в камневых опорах 6, питание к ней подводится через токоподводы. Чувствительный элемент (ЧЭ) совершает колебания с частотой вращения объекта (корпуса 1). Колебания ЧЭ преобразуются, и выходной сигнал ВРГ характеризует угловую скорость объекта ( $\bar{\Omega}_\eta$ ,  $\bar{\Omega}_\xi$ ). Кинетический момент ЧЭ создается за счет вращения объекта вокруг продольной оси. Демпфирование колебаний рамки осуществляется магнитно-индукционной системой, создающей момент  $D\dot{\alpha}$ . Для обеспечения стабильности  $D$  вводят обратную ско-

ростную (по  $\dot{\alpha}$ ) связь. Съем сигнала по углу  $\alpha$  (датчик угла) осуществляется с помощью дополнительной обмотки при вращении рамки 4 в магнитном поле.

Составим уравнение движения ВРГ по традиционной схеме. Выберем системы координат:  $O\eta\xi\zeta$  — базовая СК; СК  $OXYZ$  связана с корпусом 1 (объектом), СК  $Oxyz$  — с ЧЭ (рис. 23).

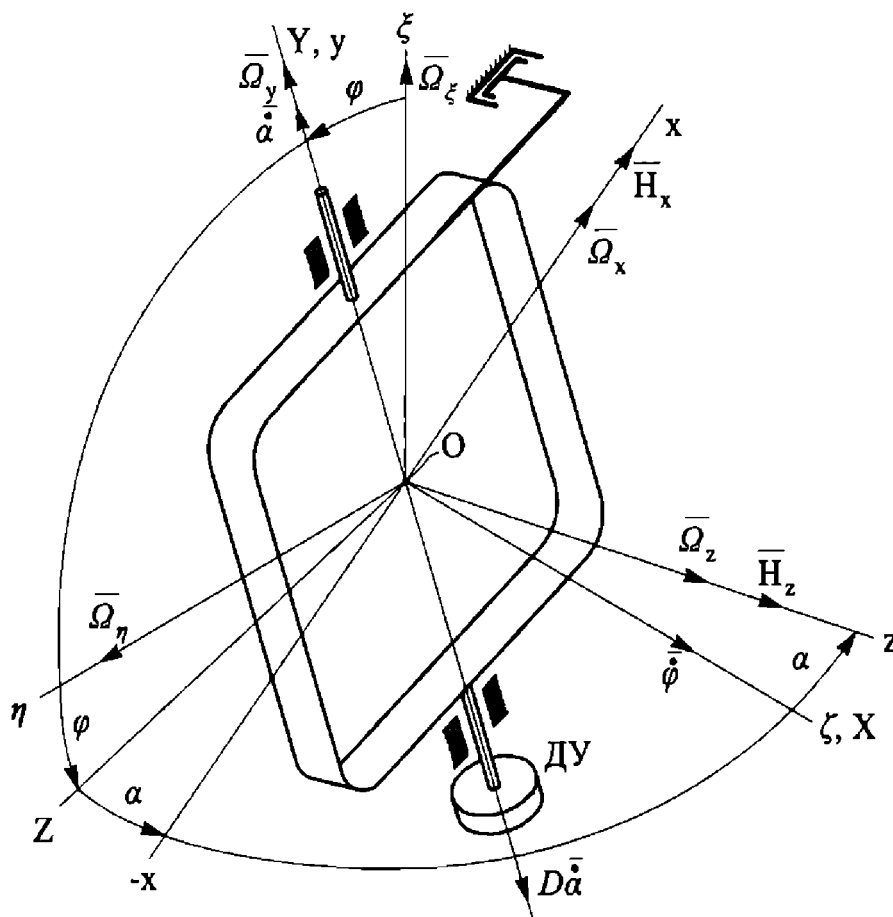


Рис. 23. К пояснению принципа работы ВРГ

Найдем проекции угловых скоростей на оси  $Oxyz$  при малом  $\alpha$ , считая  $\Omega_z = \dot{\varphi}$ :

$$\begin{aligned}\Omega_x &= -\Omega_\eta \cos \varphi \cos \alpha + \Omega_\xi \sin \varphi \cos \alpha - \Omega_z \sin \alpha \approx \\ &\approx \Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi - \dot{\varphi} \alpha;\end{aligned}$$

$$\Omega_y = \dot{\alpha} + \Omega_\xi \cos \varphi + \Omega_\eta \sin \varphi;$$

$$\Omega_z = \Omega_z \cos \alpha + \Omega_\xi \sin \varphi \sin \alpha - \Omega_z \cos \varphi \sin \alpha \approx \dot{\varphi}_0,$$

где  $\Omega_\eta$ ,  $\Omega_\xi$ ,  $\Omega_z$  — проекции скорости объекта;  $\varphi = \dot{\varphi}_0 t$  — угол поворота объекта относительно СК  $O\eta\xi\zeta$ ;  $\dot{\varphi}_0 = \text{const}$ .

При составлении уравнений движения рамки относительно  $Oy$  воспользуемся принципом Даламбера, в соответствии с которым сумма всех моментов, действующих на тело, равна нулю (см. уравнение (6)).

Момент инерции рамки

$$M_{ин} = -B\dot{\Omega}_y = -B(\ddot{\alpha} + \dot{\Omega}_\eta \sin \varphi + \dot{\Omega}_\xi \cos \varphi + \dot{\varphi}\Omega_\eta \cos \varphi - \dot{\varphi}\Omega_\xi \sin \varphi).$$

При  $\Omega_\xi = \text{const}$ ,  $\Omega_\eta = \text{const}$  и для установившегося движения рамки при  $\ddot{\alpha} = 0$

$$M_{ин} = B\dot{\varphi}(\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi).$$

Для определения гироскопического момента найдем проекции кинетического момента (момента количества движения) рамки на оси  $Ox$ ,  $Oz$ :

$$H_x = A\Omega_x; \quad H_z = C\Omega_z.$$

В соответствии с правилом гироскопического момента

$$\begin{aligned} M_\Gamma &= H_z\Omega_x - H_x\Omega_z = (C - A)\Omega_x\Omega_z = \\ &= (C - A)\dot{\varphi}(\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi - \dot{\varphi}\alpha) = \\ &= -(C - A)\dot{\varphi}^2\alpha + (C - A)\dot{\varphi}(\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi). \end{aligned}$$

Момент внешних сил  $M_{вн} = -D\dot{\alpha} + M_{вр}$ , где  $M_{вр}$  — вредные моменты, действующие вокруг оси  $Oy$ ; при описании принципа работы ВРГ полагаем  $M_{вн} = 0$ . Просуммировав моменты, получим

$$\begin{aligned} -(C - A)\dot{\varphi}^2\alpha + (C + B - A)\dot{\varphi}(\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi) &= 0; \\ (C - A)\dot{\varphi}^2\alpha &= H(\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $H = (C + B - A)\dot{\varphi}$  — кинетический момент ВРГ.

Из выражения (29) видно, что при наличии вращения объекта с угловой скоростью  $\dot{\varphi}$  центробежный момент инерции рамки  $(C - A)\dot{\varphi}^2\alpha$  в ее установившемся движении уравновешивается гироскопическим моментом  $H(\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi)$  за целое число оборотов объекта вокруг продольной оси.

Угол  $\alpha$  содержит информацию о проекциях угловой скорости объекта  $\Omega_\xi$  и  $\Omega_\eta$ , т. е. ВРГ является двухкомпонентным ДУС:



$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{H}{(C - A)\dot{\phi}^2} (\Omega_{\xi} \sin \varphi - \Omega_{\eta} \cos \varphi) = \\ &= \frac{C + B - A}{\dot{\phi}(C - A)} (\Omega_{\xi} \sin \varphi - \Omega_{\eta} \cos \varphi). \end{aligned} \quad (30)$$

Выходной сигнал с ДУ

$$U_{\text{вых}} = K_{\text{ДУ}} \alpha.$$

Далее, выполнив синусно-косинусное (умножив на  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ ) преобразование сигнала, получим

$$U_{\text{вых } \xi} = h \Omega_{\xi}; \quad U_{\text{вых } \eta} = h \Omega_{\eta},$$

где  $h = \frac{K_{\text{пр}} K_{\text{ДУ}} (C + B - A)}{2\dot{\phi}(C - A)}$  — чувствительность ВРГ, которая зависит от  $\dot{\phi}$ ;  $K_{\text{пр}}$  — коэффициент усиления преобразователя.

ВРГ — достаточно грубый прибор: порог его чувствительности составляет  $\approx 1,5$  °/с; диапазон измерения  $\pm 300$  °/с при  $\dot{\phi} \approx 20$  об/с; масса без электроники 40 г.

На первых этапах развития МГ распространение получила схема микромеханического гироскопа рамочного типа (МГР), у которого сосредоточенная масса  $m$  находится в кардановом подвесе и является его внутренней рамой 1 (рис. 24). Внешняя 2 и внутренняя 1 рамки подвешены на упругих торсионах 3—6. Датчик момента 9 расположен по оси внутренней рамки 1

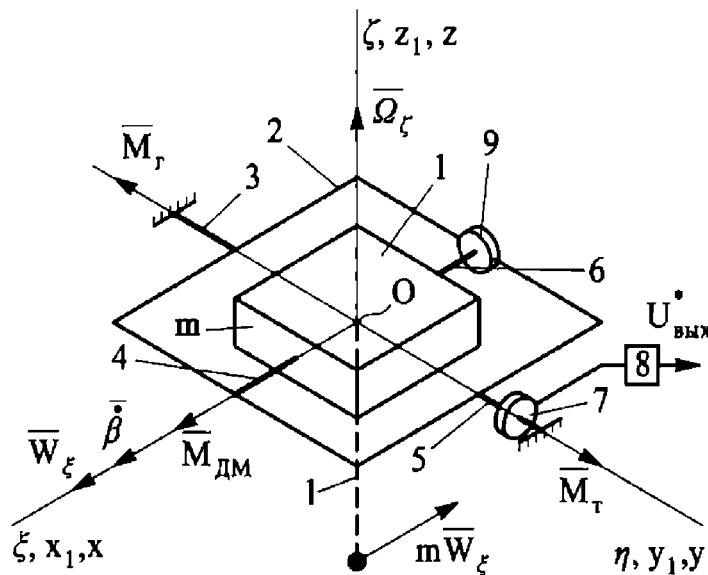


Рис. 24. Схема МГР

и возбуждает ее колебания  $\beta = \beta_0 \sin \omega t$  ( $\beta_0, \omega$  — амплитуда и частота колебаний рамки 1). Выходной сигнал снимается с ДУ 7 и преобразуется в блоке обработки выходной информации 8.

Выберем системы координат (рис. 25): базовая СК  $O\xi\eta\zeta$  связана с корпусом, СК  $Ox_1y_1z_1$  — с наружной рамкой, СК  $Oxyz$  — с внутренней рамкой. Считая рамку 2 невесомой, рассмотрим принцип работы МГР.

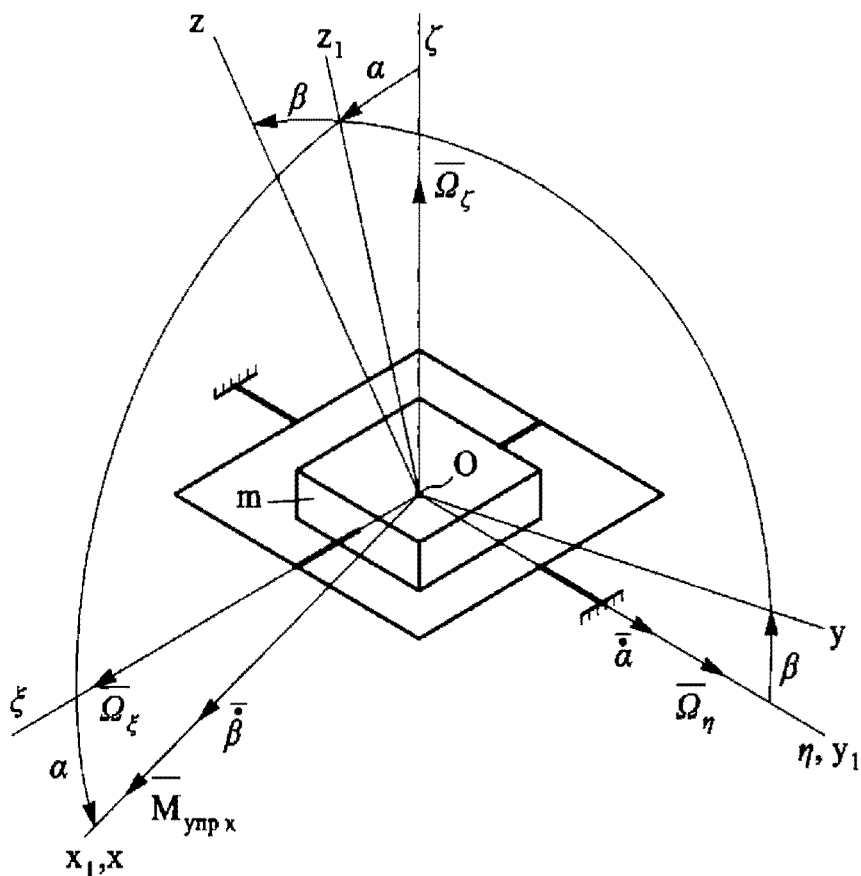


Рис. 25. К выводу уравнений движения МГР

Наличие угловой скорости корпуса  $\Omega_\zeta = \Omega$  приводит к появлению гироскопического момента, действующего на опоры 4, 6. Рассмотрим движение элементарной массы  $\Delta m = \rho S \Delta y$ , где  $\rho$  — плотность;  $S$  — площадь боковой грани сплошной рамки. Кориолисово ускорение массы  $\Delta m$  (рис. 26)

$$W_k = 2\Omega V_r \sin \beta \approx 2\Omega \dot{\beta} y \sin \beta,$$

где  $\beta = \beta_0 \sin \omega t$  — малый угол поворота рамки 1.

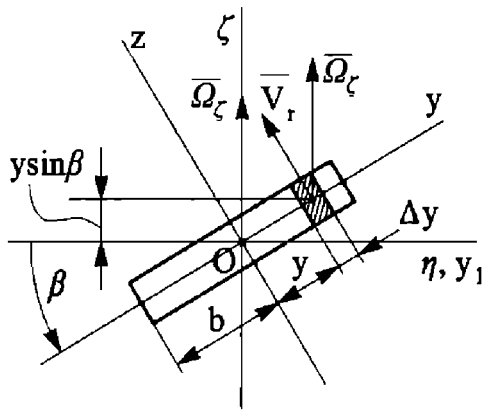


Рис. 26. К определению гироскопического момента, действующего на массу  $m$

Соответствующая кориолисова сила инерции  $\Delta F_k = \Delta m W_k$  создает момент вокруг оси  $O\eta$  ( $Oy_1$ ) наружной рамки

$$\Delta M_k = -\Delta m W_k y \sin \beta.$$

Перейдя от приращений к дифференциалам и проинтегрировав  $\Delta M_k(y)$ , получим выражение для гироскопического момента:

$$\begin{aligned} M_\Gamma = M_k &= -2\rho S \Omega \dot{\beta} \sin^2 \beta \int_{-b}^b y^2 dy = \frac{4}{3} \rho S b^3 \Omega \dot{\beta} \sin^2 \beta = \\ &= -2B \Omega \dot{\beta} \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

Выделим постоянную составляющую гироскопического момента (за целое число колебаний рамки):

$$M_\Gamma = -B \dot{\beta} \Omega = -B \beta_0 \omega \cos \omega t \cdot \Omega = -H_x \Omega,$$

где  $H_x = B \dot{\beta}$  — кинетический момент рамки 1;  $B$  — приведенный момент инерции рамки 1 относительно оси  $Ox$ .

Гироскопический момент изменяется с частотой  $\omega$  и в установившемся движении ( $\dot{\alpha} = 0$ ,  $\ddot{\alpha} = 0$ ) уравнивается упругим моментом торсионов  $M_\tau = K\alpha$ , где  $K$  — приведенная угловая жесткость торсионов;  $\alpha$  — угол поворота наружной рамки. Выходной сигнал с ДУ 7

$$\alpha = B \beta_0 \omega K^{-1} \Omega \cos \omega t;$$

$$U_{\text{вых}} = K_{\text{ДУ}} K^{-1} B \beta_0 \omega \Omega \cos \omega t.$$

После выделения постоянной составляющей сигнала в блоке обработки информации ( $\times \cos \omega t$ ) имеем

$$U_{\text{вых}}^* = h \Omega,$$

где  $h = 0,5 K_{\text{ДУ}} K_{\text{пр}} B \beta_0 \omega K^{-1}$  — чувствительность МГР по угловой скорости.

Для уменьшения энергопотребления колебания рамки осуществляют на частоте собственных колебаний.

Если центр масс рамки 1 смещен (см. штриховую линию на рис. 24) на величину  $l$  относительно т.  $O$  пересечения осей карданова подвеса, то при ускорении  $\bar{W}_\xi$  вокруг оси  $Oy_1$  возникает момент  $mlW_\xi$  инерционной силы  $mW_\xi$ . В этом случае гироскоп может выполнять и роль акселерометра:

$$U_{\text{вых}}^{**} = h\Omega + h_W W_\xi,$$

где  $h_W \approx K_{\text{ду}} K_{\text{пр}} mlK^{-1}$  — чувствительность МГР по ускорению.

В микромеханических гироскопах балочного типа возбуждаются колебания упругой балки, консольно-закрепленной или размещенной на двух опорах; применяют балки прямоугольного и треугольного сечений. При наличии угловой скорости  $\Omega_\zeta$  корпуса прибора возникают кориолисовы силы инерции (гироскопические силы) и соответствующий прогиб балки, который содержит информацию об измеряемой угловой скорости  $\Omega_\zeta$ .

Рассмотрим принцип измерения угловой скорости  $\Omega_\zeta$  объекта (рис. 27) с помощью колеблющейся массы  $m$ , укрепленной на упругом стержне (балке). Выберем СК  $O\xi\eta\zeta$ , связанную с корпусом прибора, который вращается в инерциальном пространстве с угловой скоростью  $\Omega_\zeta = \Omega$ . Масса  $m$  на стержне (массой стержня пренебрегаем) принудительно колеблется

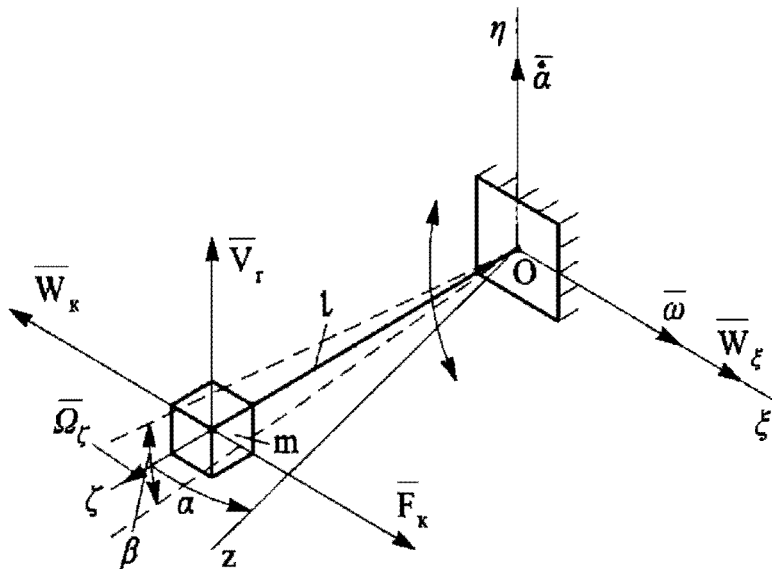


Рис. 27. К пояснению принципа измерения угловой скорости  $\bar{\Omega}_\zeta$  с помощью колеблющейся массы  $m$

с частотой  $\nu$ , малой амплитудой (по углу  $\beta$ ; см. штриховую линию на рис. 27) и угловой скоростью  $\omega = \omega_0 \sin \nu t$ ; линейная скорость центра масс  $V_r = \omega_0 l \sin \nu t = V_0 \sin \nu t$ . При наличии переносной скорости  $\bar{\Omega}$  и относительной линейной скорости  $\bar{V}_r$  масса движется с кориолисовым ускорением  $W_k = 2\Omega V_0 \sin \nu t$ , которое является причиной возникновения кориолисовой (гироскопической) инерционной силы, создающей гироскопический момент  $M_r = F_k l = 2mlV_0\Omega \sin \nu t$ . Гироскопический момент уравнивается упругим моментом  $M_{упр} = K\alpha$  ( $K$  — приведенная угловая жесткость стержня):

$$K\alpha = 2ml^2\omega_0\Omega \sin \nu t.$$

С помощью датчика угла (пьезоэлемента, тензодатчика и др.) фиксируется угол  $\alpha$ ,  $U_{вых} = K_{ДУ}\alpha$ , где  $K_{ДУ}$  — крутизна характеристики ДУ по напряжению. Введя преобразование сигнала ( $\times \sin \omega t$ ) и выделив постоянную составляющую сигнала (по углу  $\alpha^*$ ), получим

$$U_{вых}^* = K_{ДУ}K_{пр}\alpha^* = h\Omega,$$

где  $h = K_{ДУ}K_{пр}K^{-1}ml^2\omega_0$  — чувствительность «стержневого» ДУС.

При наличии линейного ускорения  $\bar{W}_\xi$  возникает дополнительный момент  $M_W = mW_\xi l$  инерционной силы  $mW_\xi$ . Следовательно, выходной сигнал прибора (ДУС-акселерометра) будет содержать информацию по  $\Omega$  и  $W_\xi$ :

$$U_{вых}^{**} = h\Omega + h_W W_\xi, \quad (31)$$

где  $h_W = K_{ДУ}K'_{пр}ml$  — чувствительность прибора по ускорению;  $K'_{пр}$  — коэффициент усиления преобразователя по второму каналу — каналу обработки сигнала по ускорению.

Более совершенной конструкцией (по сравнению со стержневым гироскопом) являются микромеханические гироскопы балочного типа (рис. 28 и 29). Основным элементом такого гироскопа является вибрирующая балка прямоугольного или треугольного сечения. Для консольно-закрепленной балки (см. рис. 28) выберем следующие СК:  $O\xi\eta\zeta$  — базовая СК, связанная с основанием (корпусом) 3; СК  $Oxуз$  связана с ЧЭ — балкой 1. Пьезоэлементы 2 возбуждают колебания балки с частотой

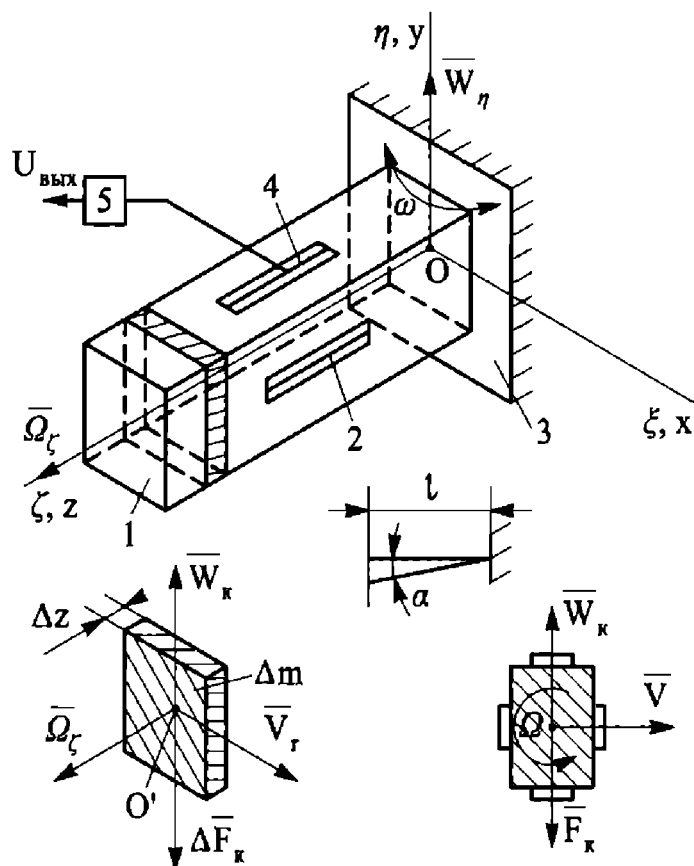
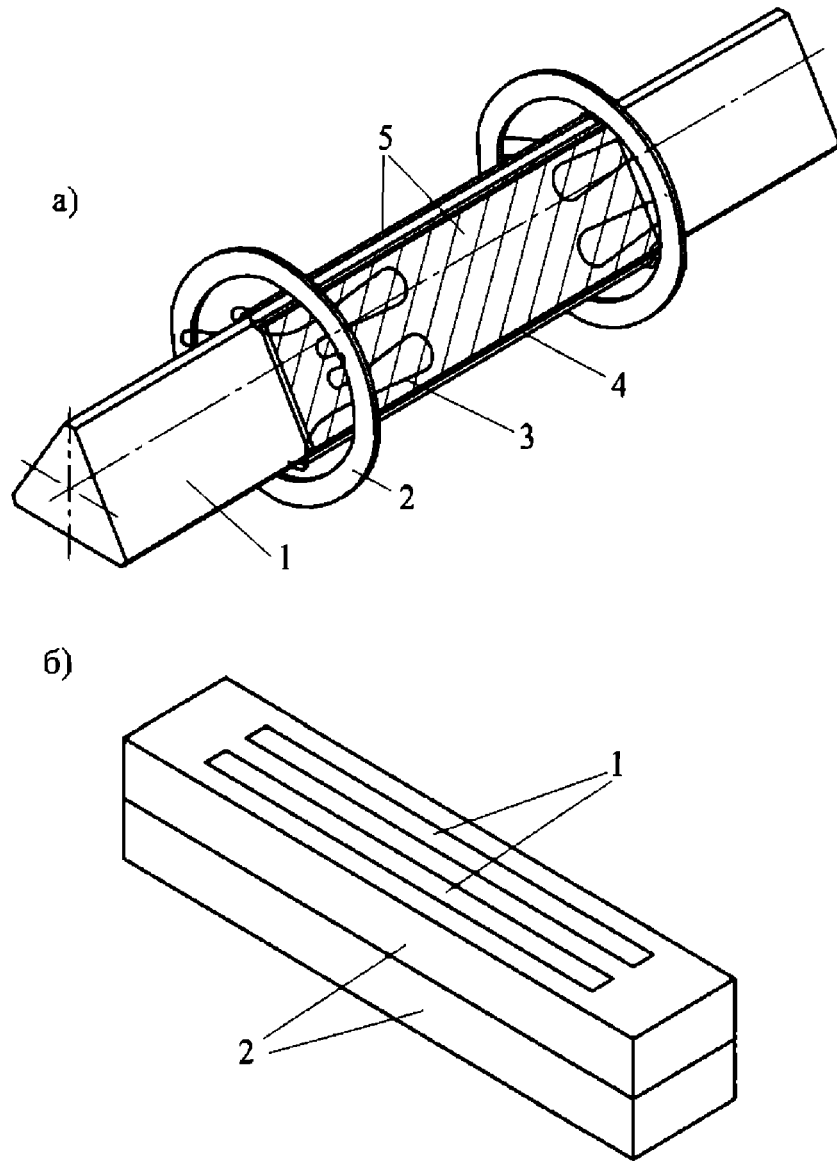


Рис. 28. Схема гироскопа балочного типа

тотой  $\omega = \omega_0 \sin vt$ . Изгиб балки 1 (угол  $\alpha$ ) фиксируется ДУ 4 (емкостными, пьезодатчиками и др.), сигнал с которых подается на блок 5 преобразователя информации. Выделим элементарную массу  $\Delta m$  балки массой  $m$ . При наличии угловой скорости основания  $\Omega_z = \Omega$  возникает кориолисово ускорение  $W_k = 2\Omega V_r$ , где  $V_r = \omega_0 z \sin vt$  — относительная линейная скорость массы  $\Delta m$ . Соответствующая кориолисова сила  $\Delta F_k = \Delta m W_k$  действует на массу  $\Delta m = \rho S \Delta z$  и вызывает гироскопический момент  $\Delta M_\Gamma = \Delta m W_k z = 2\rho S \Omega \omega_0 z^2 \Delta z \sin vt$ , где  $S$  — площадь сечения балки. Заменяв приращение  $\Delta z$  дифференциалом  $dz$  и проинтегрировав, получим гироскопический момент, изгибающий балку,

$$M_\Gamma = 2\rho S \Omega \omega_0 \sin vt \int_0^l z^2 dz = \frac{2}{3} ml^2 \omega_0 \Omega \sin vt.$$

Гироскопический момент уравновешивается упругим моментом  $M_{упр} = K\alpha$  ( $K$  — приведенная жесткость балки на изгиб;



**Рис. 29.** Балочные гирископы:

*a* — пьезовибрационный: 1 — балка; 2 — диск; 3 — упругий подвес; 4 — силовой пьезоэлемент; 5 — измерительные пьезоэлементы; *б* — биморфный: 1 — электроды; 2 — пластины, поляризованные в противоположных направлениях

$\alpha$  — угол поворота балки вокруг оси  $Ox$ , который фиксируется пьезоэлементом 4.

Угол  $\alpha = \frac{2ml^2\omega_0}{3K} \Omega \sin vt$ . После преобразований ( $\times \sin vt$ ) выделяется постоянная составляющая сигнала

$$U_{\text{вых}}^* = \frac{K_{\text{ду}}K_{\text{пр}}ml^2\omega_0}{3K} \Omega = h\Omega,$$

где  $h$  — чувствительность прибора;  $K_{ду}$ ,  $K_{пр}$  — коэффициенты датчика угла  $\psi$  и преобразователя  $\delta$ .

Нестабильность чувствительности определяется главным образом нестабильностью жесткости (влияние температуры, старения, способа крепления и др.) и характеристикой пьезоэлемента.

Для повышения точности применяют так называемые биморфные гироскопы (рис. 29, б), у которых две склеенные пьезоэлектрические пластины поляризованы в противоположных направлениях. К пластинам прикладывается напряжение, при этом одна из них сжимается, другая — растягивается, возбуждая колебания балки. Биморфные гироскопы имеют небольшие размеры (например, для ENC-03R  $8 \times 4 \times 2$  мм при массе 0,2 г) с достаточно высокими характеристиками. Основным недостатком при использовании пьезокерамики — температурная нестабильность параметров. Разновидностью балочных гироскопов можно считать камертонные гироскопы. Использование в качестве ЧЭ гироскопа балки позволяет создать комбинированный гироскоп, выполняющий функции ДУС и акселерометра (см. выражение (31)). Разделение сигналов по угловой скорости и линейному ускорению осуществляется с помощью схем фильтрации сигнала.

В волновых твердотельных гироскопах цилиндрический или полусферический резонатор приводится в колебательное движение в плоскости, перпендикулярной к его оси [2, 3]. При вращении (переносном) резонатора (корпуса прибора) возникают кориолисовы силы инерции, которые воздействуют на резонатор так, что одна его часть растягивается, а другая — сжимается, что приводит к отставанию упругой волны резонатора на угол  $\varphi$ , содержащий информацию об угловой скорости корпуса прибора.

Таким образом, принцип работы механических и электро-механических гироскопов основан на сообщении чувствительному элементу гироскопа (ротору, камертону, рамке, балке, упругой оболочке-резонатору и др.) относительной скорости  $\vec{V}_r$  с помощью специального привода (реже при вращении объекта). Наличие переносной угловой скорости  $\vec{\omega}_e$  корпуса



прибора, установленного на объекте, приводит к появлению кориолисова ускорения, кориолисовых сил инерции, момента кориолисовых сил инерции (т. е. гироскопического момента) и возникновению свойств гироскопа, используемых для измерения параметров ориентации объекта. Отметим, что в литературе стал встречаться термин «кориолисовый гироскоп», что очевидно некорректно.

Оптические гироскопы (волоконно-оптические и лазерные) основаны на использовании известного эффекта Саньяка—Майкельсона, в соответствии с которым при вращении оптического контура расстояния, пройденные разнонаправленными лучами, в контуре отличаются на величину, пропорциональную угловой скорости контура в инерциальном пространстве.

Далее рассмотрим принцип работы и получим аналитические соотношения для основных типов гироскопов систем ориентации и навигации [2, 3], пользуясь допущениями, принимаемыми на первой стадии проектирования приборов (по терминологии инженеров, при разработке аван-проекта).

В кардановых гироскопических системах углы ориентации объекта определяются «геометрически» с помощью датчиков угла, размещенных по осям карданова подвеса. В бескарданных системах ориентации (БСО), расположенных геометрически с помощью датчиков углов, углы ориентации объекта устанавливаются аналитически с помощью интегрирования угловых скоростей, определяемых ДУС.

В настоящее время системы строятся на базе гироскопических чувствительных элементов и акселерометров. Например, для бесплатформенной системы инерциальной системы навигации (БИНС) в качестве ЧЭ могут быть использованы три ДУС и три акселерометра, сигналы с которых интегрируются в бортовом компьютере. При этом автономно автоматически определяются углы ориентации объекта и его местоположение. Поясним принцип автономного определения скорости объекта и его местоположения (пути).

Автономное (вне связи с Землей) определение координат объекта связано с измерением его ускорения с помощью акселерометра (рис. 30).

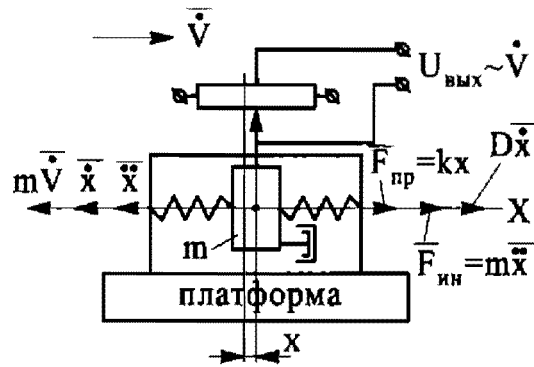


Рис. 30. Схема акселерометра

Интегрируя сигнал акселерометра, получают значение скорости, а последующее интегрирование дает значение пройденного расстояния.

Пусть акселерометр установлен на горизонтальной платформе при движении объекта с ускорением  $\dot{V}$ .

Уравнение движения массы  $m$  запишем в виде

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + Kx = m\dot{V},$$

где  $d$  — коэффициент демпфирования;  $K$  — жесткость пружины.

При установившемся движении

$$x_* = \frac{m}{K} \dot{V}, \quad (32)$$

т. е., измеряя  $x_*$  с помощью датчика перемещений, определяют ускорение:

$$U_{\text{вых}} = K_d m K^{-1} \dot{V} = h \dot{V},$$

где  $K_d$  — крутизна характеристики датчика перемещений;  $h$  — чувствительность акселерометра.

Дважды интегрируя сигнал с акселерометра, получают значение скорости  $V \approx \dot{V}t$  и пройденного пути  $s \approx 0,5\dot{V}t^2$ .

Если имеются погрешность (угол  $\beta$ ) горизонтирования платформы и нулевой  $U_0$  сигнал акселерометра, то появляется погрешность измерения ускорения  $U_0 + hg \sin \beta \approx U_0 + hg\beta$ .

При определении скорости  $V$  объекта и пройденного пути  $s$  погрешности (при постоянных значениях параметров) будут значительны:  $\Delta V = (U_0 + hg\beta)t$  и  $\Delta s = 0,5t^2(U_0 + hg\beta)$ .

В связи с этим при построении инерциальных систем навигации (ИНС) на базе гиросtabilизированных платформ используют прецизионные платформы (например, настроенные на период Шулера [2]).

В БИНС используют прецизионные ДУС и акселерометры. Эти системы навигации выполняют вычисления с высокой точностью, по сути моделируя прецизионную кардановую систему с настройкой на период Шулера.

## 1. МОДЕЛЬ ПОГРЕШНОСТИ ГИРОСКОПА

---

Под действием вредных (возмущающих) моментов гироскоп прецессирует (см. формулу (19)), утрачивая способность сохранять первоначальное положение в инерциальном пространстве. Угол  $\theta$  отклонения гироскопа за заданное время  $\Delta t$  называют дрейфом (или уходом) гироскопа:

$$\theta = \frac{M_{вр}}{H} \Delta t = \omega_{ССП} \Delta t, \quad (33)$$

где  $\omega_{ССП}$  — собственная скорость прецессии (ССП), или скорость дрейфа (ухода) гироскопа.

Практическая гироскопия до конца XX в. была связана во многом с проблемой уменьшения вредных моментов, действующих на гироскоп. Применялись опоры «сухих» гироскопов с малым трением: специальные шарикоподшипниковые, газостатические и упругие опоры, магнитные и электростатические подвесы и т. д. Созданы поплавковые гироскопы (в отличие от «сухих» гироскопов, в которых ротор вращается в герметичной камере-поплавке, помещенной в жидкость); в этом случае архимедова сила разгружает чувствительные опоры — опоры поплавка (см. рис. 20). Впоследствии разрабатываются гироскопы, не имеющие быстровращающегося ротора и карданова подвеса.

Собственная скорость прецессии (дрейфа)

$$\omega_{ССП} = \omega_0 \pm \Delta\omega_{сл}, \quad (34)$$

где  $\omega_0$  — постоянная составляющая ССП (обычно устанавливают при испытаниях гироскопа в заводских условиях или определенных режимах эксплуатации объекта);  $\Delta\omega_{сл}$  — случайная составляющая ССП.

Величину  $\omega_0$  можно учитывать при обработке информации, алгоритмической компенсации погрешностей гироскопа или компенсировать приложением управляющего (компенсационного) момента  $M_{упр} = H\omega_0$ .

В 1960-е годы появился термин «модель погрешности гироскопа», под которым подразумевалась, как правило, аналитическая зависимость скорости дрейфа от условий эксплуатации: перегрузки, температуры, времени эксплуатации и др.

Применение этого термина имело следующие цели:

- разработка унифицированного паспорта гироприбора (независимо от фирмы-изготовителя);
- создание единой методики оценки погрешностей гироскопов на стадии изготовления и приемосдаточных испытаний, которая позволяет вмешиваться в процесс балансировки и регулировки прибора для повышения его точности;
- разработка методики прогнозирования погрешности гироприбора в процессе эксплуатации и методов алгоритмической компенсации погрешностей гироприборов и гиросистем.

Рассмотрим простейшую модель погрешности трехстепенного гироскопа с шарикоподшипниковыми опорами (рис. 31, а) при наличии линейной перегрузки  $n_\zeta = \frac{W_\zeta}{g}$ ,  $n_\eta = \frac{W_\eta}{g}$ ,  $n_\xi = \frac{W_\xi}{g}$ , где  $W_\xi$ ,  $W_\eta$ ,  $W_\zeta$  — проекции ускорений объекта на оси  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $O\zeta$ .

Возмущающий (вредный) момент шарикоподшипниковой опоры внутренней рамки гироскопа

$$M_{шп} = M_0 + K_r F_r + K_a F_a, \quad (35)$$

где  $M_0$  — составляющая возмущающего момента опоры, которая не зависит от нагрузки;  $F_r$ ,  $F_a$  — радиальная и осевая силы, действующие на опору;  $K_r$ ,  $K_a$  — коэффициенты, определяемые по справочнику в зависимости от типа, конструкции и условий эксплуатации шарикоподшипников.

В рассматриваемом случае

$$F_r = m \sqrt{W_\zeta^2 + W_\eta^2} = mW_r = Gn_r;$$

$$F_a = mW_\xi = Gn_\xi,$$

где  $m$  — масса гиروزла (ротора и внутренней рамки);

$$n_r = \sqrt{W_\zeta^2 + W_\eta^2} / g.$$

Учтем разбалансировку гиروزла, характеризуемую смещением центра масс гиروزла относительно т.  $O$  в осевом  $l_z$  и радиальном  $l_y$  направлениях (рис. 31, б). Момент, вызванный разбалансировкой,

$$M_{рх} = mW_\zeta l_z - mW_\eta l_y = G(l_z n_\zeta - l_y n_\eta). \quad (36)$$

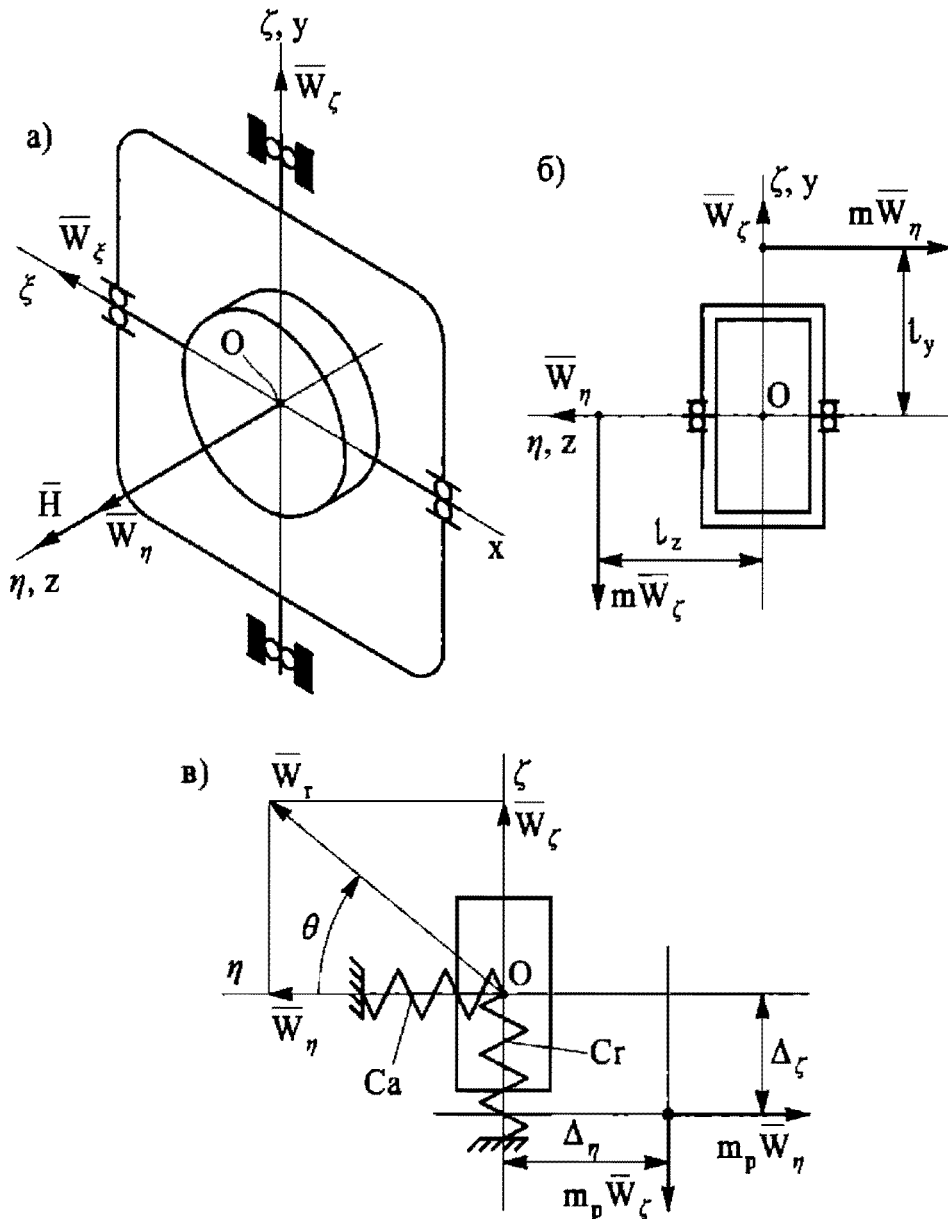


Рис. 31. К определению моментов, действующих вокруг оси  $Ox$  гиروزла

Для упрощения выкладок учтем только осевую разбалансировку:

$$M_{px} = Gl_z n_\zeta. \quad (37)$$

Определим момент, вызванный неравножесткостью крепления ротора в главных опорах гироскопа. Механическая модель ротора показана на рис. 31, в, где  $C_r, C_a$  — приведенные жесткости крепления ротора в радиальном и осевом направлениях.

Инерционная сила  $m_p W_\zeta$  вызовет смещение центра масс  $m_p$  ротора  $\Delta_\zeta = \frac{m_p W_\zeta}{C_r}$ , а  $m_p W_\eta$  — смещение  $\Delta_\eta = \frac{m_p W_\eta}{C_a}$ . Следовательно, вокруг оси  $Ox$  возникает возмущающий момент, вызванный нежестким креплением ротора:

$$M_{нж} = m_p W_\eta \Delta_\zeta - m_p W_\zeta \Delta_\eta = m_p^2 W_\zeta W_\eta \left( \frac{1}{C_r} - \frac{1}{C_a} \right). \quad (38)$$

Обычно  $C_r > C_a$ ; обозначив  $K_{нж} = \frac{1}{C_a} - \frac{1}{C_r}$ ,  $W_\zeta = W_r \cos \theta$ ,  $W_\eta = W_r \sin \theta$ , получим  $M_{нж} = -0,5 G_p^2 n_r^2 K_{нж} \sin 2\theta$  и максимальные значения ( $n_r = W_r/g$ )

$$M_{нж \max} = -0,5 K_{нж} G_p^2 n_r^2. \quad (39)$$

Просуммируем уравнения (35), (37), (38) и разделим сумму моментов на  $H$ . Тогда

$\omega_{ССП}(n) = \omega_0 + \omega_{1r}(g)n_r + \omega_{1a}(g)n_\xi + \omega_{1p6}(g)n_\zeta + \omega_2(g^2)n_r^2$ ;  
где  $\omega_0 = \frac{M_0}{H}$ ,  $\omega_{1r}(g) = \frac{K_r G}{H}$ ,  $\omega_{1a}(g) = \frac{K_a G}{H}$ ,  $\omega_{1p6}(g) = \frac{l_z G}{H}$ ,  
 $\omega_2(g^2) = \frac{0,5 K_{нж} G_p^2}{H}$  — удельные составляющие скорости дрейфа (ССП).

Приняв  $n_r = n_\zeta = n_\xi = n$ , получим более простую зависимость для зависимости скорости дрейфа от перегрузки:

$$\omega_{др}(n) = \omega_0 + \omega_1(g)n + \omega_2(g^2)n^2, \quad (40)$$

где  $\omega_1(g) = \omega_{1r}(g) + \omega_{1a}(g) + \omega_{1p6}(g)$ .

Нелинейность жесткостных характеристик главных опор гироскопа, погрешности геометрической формы шарикоподшипниковых опор и другие несовершенства конструкции при-

водят к более сложной зависимости модели погрешности гироскопа от степени перегрузки:

$$\omega_{др} = \sum_{i=0}^{i=n} \omega_i (g^i) n^i. \quad (41)$$

При больших перегрузках степени  $i$  могут быть нецелыми числами (например,  $i = 1,5$ ); максимальная степень  $i \leq 5$ .

Зависимость погрешности гироскопа от температуры  $\Delta t$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) с учетом скорости изменения температуры (модель погрешности) имеет вид

$$\omega_{др}(\Delta t \text{ } ^{\circ}\text{C}) = \sum_{i=0}^{i=m} \omega_i (\Delta t^i) \Delta t^i + K_{\Delta t} \frac{\Delta t}{t}, \quad (42)$$

где  $\omega_i(\Delta t^i)$ ,  $K_{\Delta t}$  — удельные составляющие ССП.

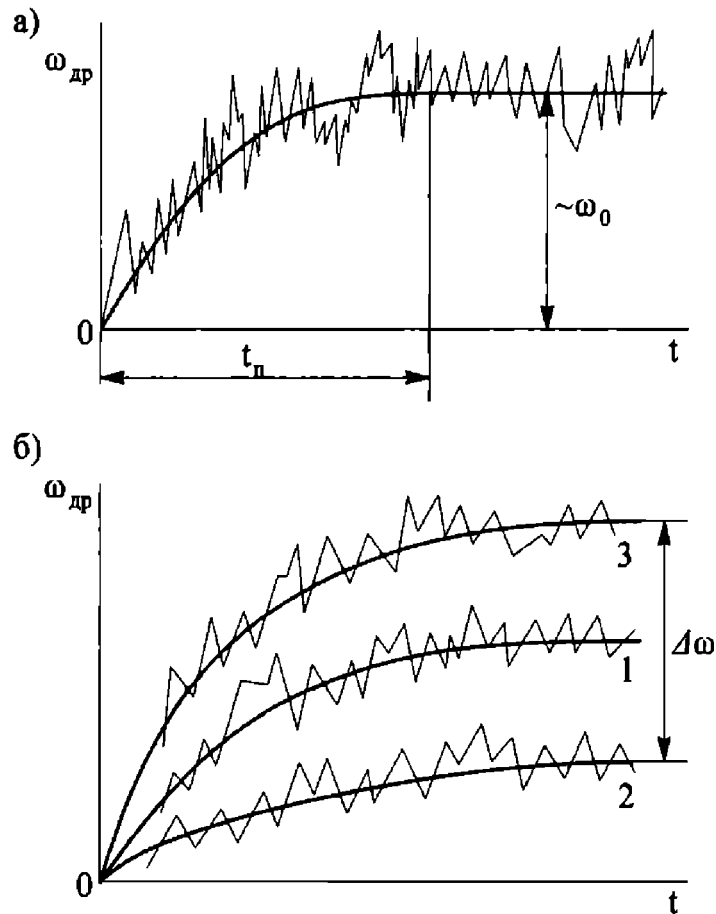
В инженерной практике  $m \leq 2$ , т. е.  $i$  принимает значение 0, 1, 2; наиболее часто выбирают  $i = 1$ .

Временные зависимости  $\omega_{др}$  более сложные, и их определяют экспериментальным путем. В одном запуске часто  $\omega_{др}$  в среднем изменяется по экспоненциальному закону (рис. 32, а), реже по линейной зависимости и др. Время переходного процесса может быть значительным — до нескольких часов в зависимости от типа конструкции гироскопа. Всегда имеется разброс  $\Delta\omega$  среднего значения  $\omega_{др}$  от запуска к запуску прибора (рис. 32, б), что затрудняет алгоритмическую компенсацию погрешностей гироскопа.

Рассмотрим приближенную модель погрешности сферического гироскопа. Классический сферический гироскоп (рис. 33) представляет собой быстровращающуюся сферу, подвешенную с помощью бесконтактного подвеса — электростатического (рис. 34), газового, жидкостного и др. Сферический гироскоп может быть чувствительным элементом БИНС, ИНС, систем ориентации и гиросtabilизаторов. К сферическим относятся также гироскопы головок самонаведения, имеющие сферический шарикоподшипниковый подвес.

Положение сферы ( $Ox'y'z'$ ) определяется углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varphi$  (рис. 33, а) относительно базовой СК  $O\xi\eta\zeta$ .





**Рис. 32.** Зависимость  $\omega_{др}$  от времени  $t$ :

*a* — в одном запуске ( $t_{п}$  — время переходного процесса); *б* — от запуска к запуску (1—3)

Условие устойчивости сферического гироскопа, при котором затухают нутационные колебания, имеет вид

$$CD_x > AD_z,$$

где  $C, A$  — осевой и экваториальный моменты инерции ротора ( $Ox'y'z'$  — главные оси инерции; в дальнейшем штрих опускаем);  $D_x, D_z$  — удельные демпфирующие моменты (относительно осей  $Ox'$  и  $Oz'$ ).

При  $D_x = D_z$  необходимо обеспечить  $C > A$  путем утолщения сферы по экватору (рис. 33, б) или с помощью технологического пояска (рис. 33, в). При анализе точности устойчивого сферического гироскопа можно пользоваться прецессионными уравнениями, считая  $H = \text{const}$ .

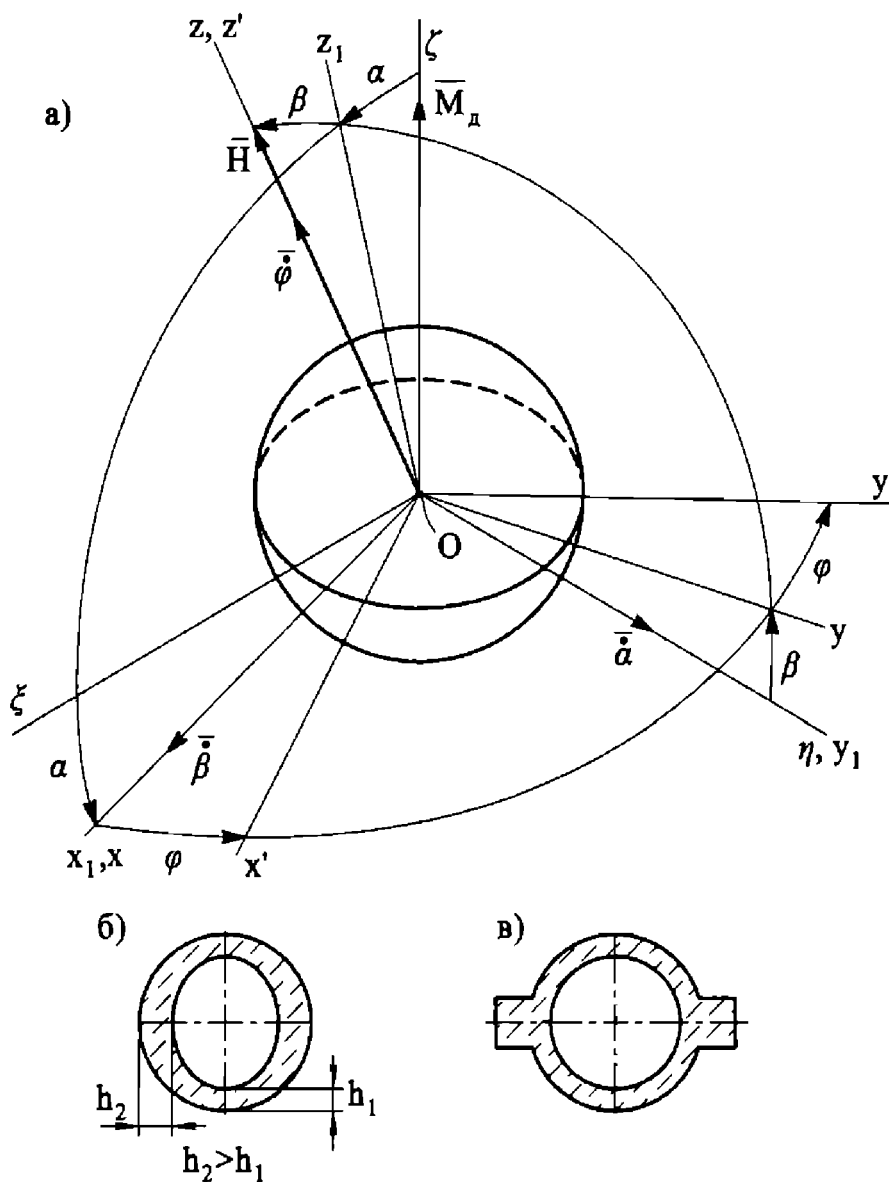


Рис. 33. К выводу уравнений движения сферического гироскопа

Полагая СК  $O\xi\eta\zeta$  неподвижной, найдем абсолютные угловые скорости при малых  $\alpha$  и  $\beta$ :

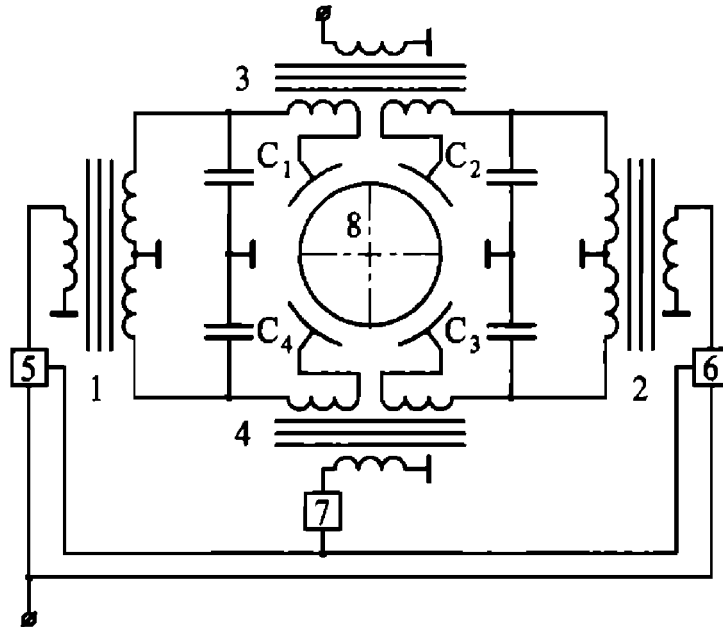
$$\omega_x \approx \dot{\beta};$$

$$\omega_y = \dot{\alpha} \cos \beta \approx \dot{\alpha}.$$

Проекции момента  $M_g$  двигателя, направленного по оси  $O\zeta$  (оси статора двигателя) на оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$M_x = -M_d \sin \alpha \approx -\alpha M_d;$$

$$M_y = M_d \cos \alpha \sin \beta \approx \beta M_d.$$



**Рис. 34.** Принципиальная схема электростатического гироскопа: 1, 2 — элементы питания; 3, 4 — элементы системы определения положения ротора (датчики положения); 5, 6 — усилители мощности; 7 — фазочувствительный усилитель; 8 — ротор;  $C_1$ — $C_4$  — разделительные конденсаторы

Прецессионные уравнения движения гироскопа для СК  $Oxyz$ :

$$\Sigma M_x = 0; \quad -N\dot{\alpha} - \alpha M_d + M_x = 0;$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad N\dot{\beta} + \beta M_d + M_y = 0,$$

где  $M_x$ ,  $M_y$  — внешние (вредные, управляющие) моменты.

После преобразования уравнений получим

$$\dot{\alpha} + \varepsilon\alpha = \omega_{\text{ССП}};$$

$$\dot{\beta} + \varepsilon\beta = \omega'_{\text{ССП}}, \quad (43)$$

где  $\varepsilon = M_d/H$  — удельная скорость прецессии сферического гироскопа, вызванная моментом двигателя;  $\omega_{\text{ССП}} = \frac{M_x}{H}$ ;

$\omega'_{\text{ССП}} = -\frac{M_y}{H}$  — ССП под действием вредных моментов  $M_x$ ,  $M_y$ .

При  $M_x = M_y = 0$  решение (43) имеет вид  $\alpha = \alpha_0 e^{-\varepsilon t}$ ;  $\beta = \beta_0 e^{-\varepsilon t}$ , где  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  — углы, характеризующие начальное положение оси ротора при  $t = 0$ .

Траектория апекса на картинной плоскости — прямая  $\alpha = \frac{\alpha_0}{\beta_0} \beta$ , т. е. ось гироскопа «корректируется» моментом дви-

гателя и движется кратчайшим путем к совмещению с вектором  $M_d$  (своеобразная радиальная коррекция), что приводит к погрешности сферического гироскопа; при наличии момента двигателя сферический гироскоп «теряет» свойства свободно-го гироскопа.

Оценим погрешность сферического гироскопа, считая, что двигатель уравнивает момент сил вязкого трения (газодинамический момент сопротивления вращению ротору)  $M_d = D_z \dot{\phi}$ . Тогда  $\varepsilon = \frac{D_z \dot{\phi}}{c \dot{\phi}} = \frac{1}{T}$ , где  $T = \frac{c}{D_z}$  — постоянная времени сферического гироскопа.

При отклонении ротора гироскопа на углы  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  скорость его прецессии

$$\dot{\alpha} = \omega_{\text{ССП}}^* = \omega_{\text{ССП}} - \frac{\alpha^*}{T}; \quad \dot{\beta} = \omega_{\text{ССП}}^{**} = \omega'_{\text{ССП}} - \frac{\beta^*}{T},$$

т. е. гироскоп должен работать при малых углах  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  и с малым удельным демпфирующим моментом  $D_z$ .

Если имеются разбалансировка ротора, неравножесткость подвеса, то модель погрешности сферического гироскопа запишем с учетом выражения (41):

$$\omega_{\text{ССП}}(n) = \frac{\theta^*}{T} + \omega_0 + \omega_1(g)n + \omega_2(g^2)n^2 + \dots, \quad (44)$$

где  $\theta^*\{\alpha^*, \beta^*\}$  — угол отклонения от оси  $Oz$ ;  $\omega_0$ ,  $\omega_1(g)$ ,  $\omega_2(g^2)$  — удельные составляющие ССП;  $n$  — линейная перегрузка.

Для электростатических гироскопов навигационных систем подводных лодок  $\omega_0 \approx 10^{-5}$  °/ч, КЛА —  $10^{-2} \dots 10^{-5}$  °/ч, сферических гироскопов головок самонаведения — до  $10$  °/ч.

В модели (44) появляется характерная зависимость ССП от угла  $\theta^*$  отклонения оси сферы относительно вектора момента приводного двигателя. Для уменьшения этой погрешности применяют двигатель, в котором с помощью специальной следящей системы обеспечивается совпадение осей сферы и вектора момента двигателя.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХСТЕПЕННОГО ГИРОСКОПА В ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

---

С помощью идеального трехстепенного гироскопа можно определить углы ориентации объекта относительно инерциальной (неподвижной) СК  $O\xi\eta\zeta$ . Для установления ориентации объекта с помощью гироскопа относительно Земли реализуется подвижная СК, которая имеет переносную угловую скорость  $\bar{\omega}_e$  относительно инерциального пространства, вызванную суточным вращением Земли вокруг своей оси и движением объекта относительно Земли. Тогда при составлении уравнений гироскопа необходимо дополнительно учесть гироскопический момент  $\bar{M}_g = \bar{H} \times \bar{\omega}_e$  в его проекциях на оси СК  $Ox_1y_1z_1$ . В зависимости от задач ориентации и навигации применяют географическую, ортодромическую, траекторную (скоростную) и другие СК. Так, географическую  $O\xi_g\eta_g\zeta_g$  и ортодромическую  $O\xi_o\eta_o\zeta_o$  СК используют для анализа работы курсовых гироскопов (гирополукомпасов, указателей направления ортодромии, гироскопов и т. п.).

В географической СК навигация осуществляется по локсодромии, линии равных курсов, в ортодромической СК — по ортодромии, кратчайшему расстоянию между двумя точками на поверхности Земли (по дуге радиусом  $R \approx 6372$  км). Траекторную СК  $O\xi_t\eta_t\zeta_t$  применяют для анализа гироскопов, определяющих положение объекта относительно плоскости горизонта, например углов крена и тангажа для самолетов (гировертикаль). Определим проекции  $\bar{\omega}_e$  абсолютной угловой скорости на оси подвижных базовых СК.

Оси географической СК  $O\xi_g\eta_g\zeta_g$  направлены следующим образом (рис. 35):  $O\xi_g$  — на восток,  $O\eta_g$  — на север,  $O\zeta_g$  — в зе-

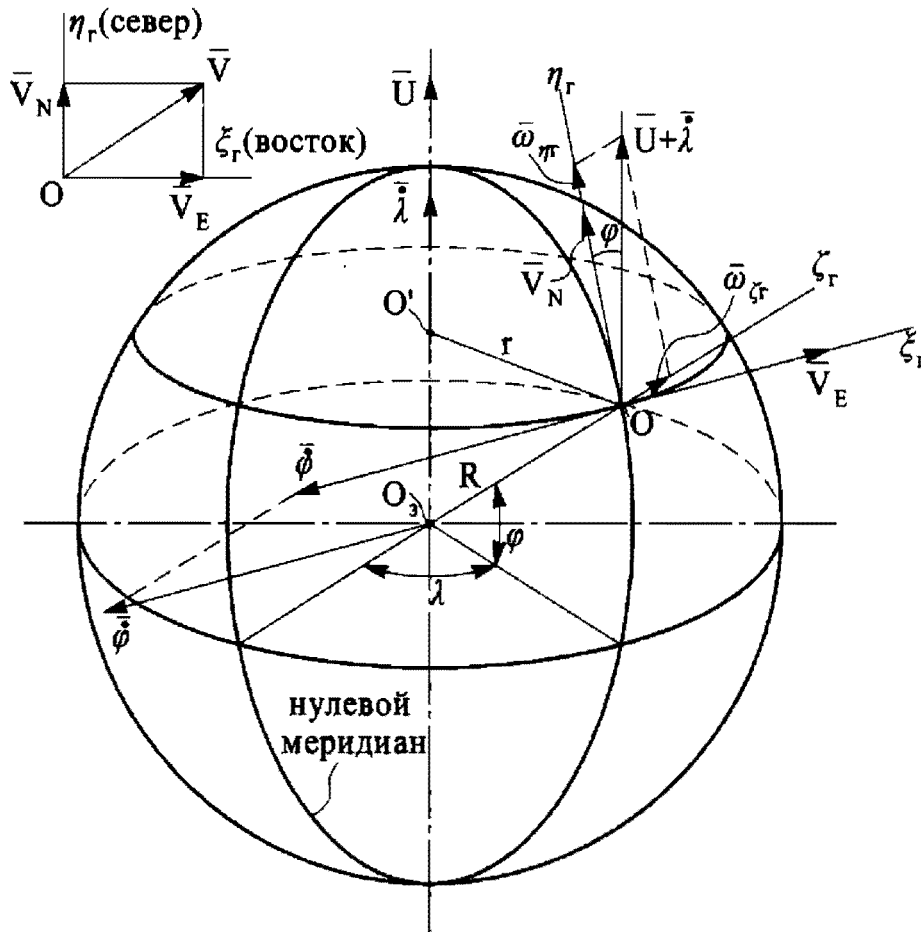


Рис. 35. Географическая СК

нит (по вертикали). Определим проекции  $\omega_{\xi_g}$ ,  $\omega_{\eta_g}$ ,  $\omega_{\zeta_g}$  с учетом движения объекта относительно Земли со скоростью  $\bar{V} = \bar{V}_N + \bar{V}_E$ , где  $\bar{V}_N$  и  $\bar{V}_E$  — северная и восточная составляющая скорости. Основные допущения: сферическая форма Земли, высота полета мала по сравнению с радиусом Земли, движение (полет) — в плоскости горизонта. Положение объекта в географической СК определяется углами долготы  $\lambda$  и широты  $\varphi$ . Угловые скорости изменения долготы  $\dot{\lambda}$  и широты  $\dot{\varphi}$  (см. рис. 35):

$$\dot{\lambda} = \frac{V_E}{r} = \frac{V_E}{R \cos \varphi} = \frac{V \sin \psi}{R \cos \varphi};$$

$$\dot{\varphi} = \frac{V_N}{R} = \frac{V \cos \psi}{R}.$$

Спроецируем векторы  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{U}$  на оси  $O\xi_g\eta_g\zeta_g$  (здесь  $U = 15^\circ/\text{ч}$  — угловая скорость суточного вращения Земли):

$$\begin{aligned}\omega_{\xi\Gamma} &= -\dot{\varphi} = -\frac{V_N}{R}; \\ \omega_{\eta\Gamma} &= (U + \dot{\lambda}) \cos \varphi = U \cos \varphi + \frac{V_E}{R}; \\ \omega_{\zeta\Gamma} &= (U + \dot{\lambda}) \sin \varphi = U \sin \varphi + \frac{V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi.\end{aligned}\quad (45)$$

Оси ортодромической СК  $O\xi_0\eta_0\zeta_0$  (рис. 36) направлены:  $O\zeta_0$  — в зенит,  $O\eta_0$  — по касательной к ортодромическому меридиану,  $O\xi_0$  — перпендикулярно к плоскости  $\eta_0 O\zeta_0$ . Положение объекта в СК  $O\xi_0\eta_0\zeta_0$  характеризуется длиной дуги  $S$  и боко-

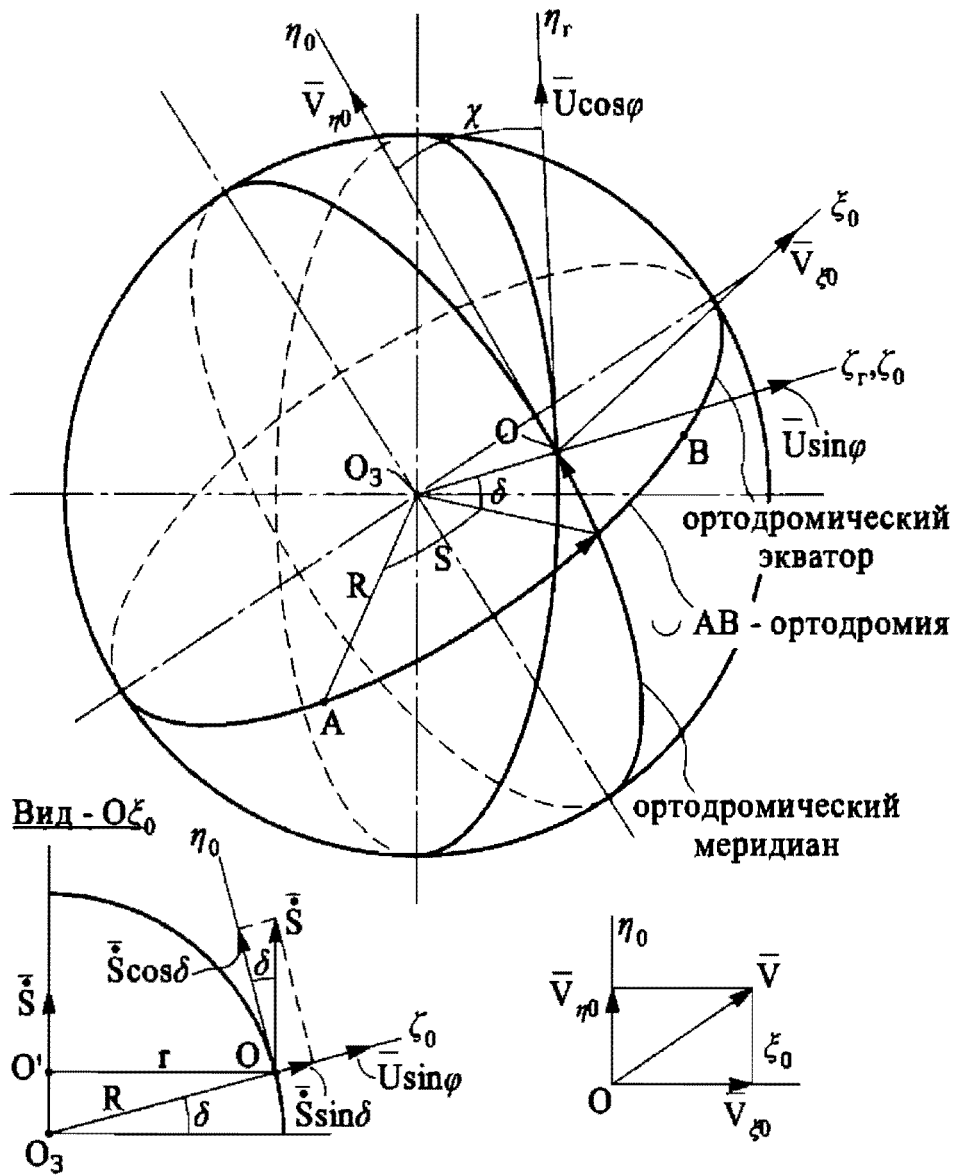


Рис. 36. Ортодромическая СК

вым отклонением  $\delta$  от ортодромии, при навигации по ортодромии  $\delta < 1 \dots 2^\circ$ . Пользуясь вышепринятыми допущениями, определим угловые скорости  $\dot{S}$  и  $\dot{\delta}$ :

$$\dot{S} = \frac{V_{\xi_0}}{r} = \frac{V_{\xi_0}}{R \cos \delta}; \quad \dot{\delta} = \frac{V_{\eta_0}}{R},$$

где  $V_{\xi_0}, V_{\eta_0}$  — составляющие скорости объекта  $\vec{V} = \vec{V}_{\xi_0} + \vec{V}_{\eta_0}$  на оси  $O\xi_0$  и  $O\eta_0$ .

Спроецируем векторы  $\vec{S}, \vec{\delta}, \vec{U} \cos \varphi, \vec{U} \sin \varphi$  на оси  $O\xi_0 \eta_0 \zeta_0$  (см. рис. 36):

$$\begin{aligned} \omega_{\xi_0} &= U \cos \varphi \sin \chi - \frac{V_{\eta_0}}{R}; \\ \omega_{\eta_0} &= U \cos \varphi \cos \chi + \dot{S} \cos \delta = U \cos \varphi \cos \chi + \frac{V_{\xi_0}}{R}; \\ \omega_{\zeta_0} &= U \sin \varphi + \dot{S} \sin \delta = U \sin \varphi + \frac{V_{\xi_0}}{R} \operatorname{tg} \delta \approx U \sin \varphi, \end{aligned} \quad (46)$$

где  $\chi$  — угол между географическим и ортодромическим меридианами.

В траекторной СК  $O\xi_T \eta_T \zeta_T$  (рис. 37) оси направлены:  $O\zeta_T$  — в зенит,  $O\eta_T$  — по вектору горизонтальной составляющей скорости объекта (отсюда название «скоростная СК»),  $O\xi_T$  — перпендикулярно к плоскости  $\eta_T O\zeta_T$  в правый борт объекта (самолета).

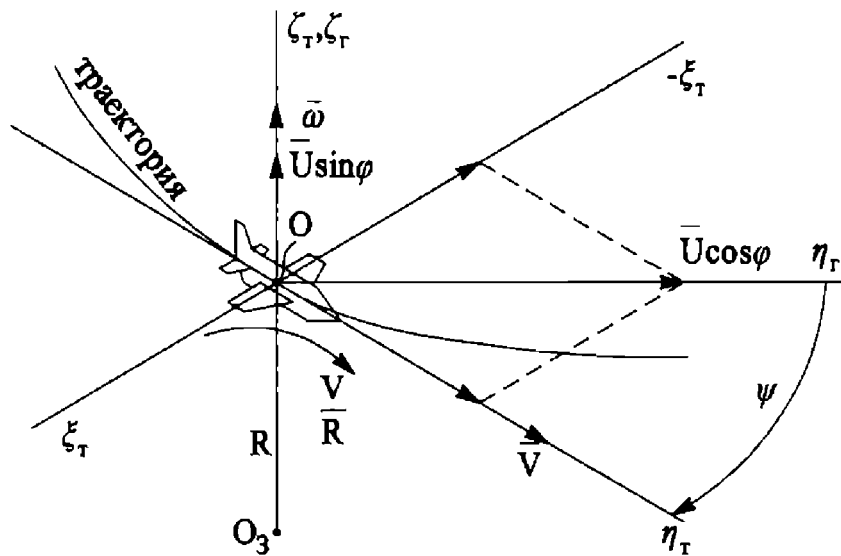


Рис. 37. Траекторная СК



При вышепринятых допущениях спроецируем (см. рис. 37) векторы  $\bar{U} \sin \varphi$ ,  $\bar{U} \cos \varphi$ ,  $\bar{\omega}_b$ ,  $\bar{\omega}_o$  на оси СК  $O\xi_T\eta_T\zeta_T$ ; здесь  $\omega_b = \frac{V}{\rho}$  — угловая скорость поворота (виража) вокруг оси  $O\zeta_o$ ;  $\rho$  — геодезический радиус траектории;  $\omega_o = \frac{V}{R}$  — угловая скорость движения (облета) объекта относительно Земли (вокруг оси  $O\xi_T$ ):

$$\begin{aligned}\omega_{\xi_T} &= -U \cos \varphi \sin \psi - \frac{V}{R}; \\ \omega_{\eta_T} &= U \cos \varphi \cos \psi; \\ \omega_{\zeta_T} &= U \sin \varphi + \frac{V}{\rho},\end{aligned}\tag{47}$$

где  $\psi$  — географический курс объекта.

Составим прецессионные уравнения движения гироскопа (рис. 38, а), предназначенного для измерения углов ориентации объекта в произвольной подвижной СК  $O\xi\eta\zeta$ ;  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$ ,  $\omega_\zeta$  — проекции абсолютной угловой скорости СК  $O\xi\eta\zeta$  на ее оси. В начальный момент движения осуществлена выставка гироскопа с помощью специальных средств относительно СК  $O\xi\eta\zeta$ .

Положение оси гироскопа характеризуется углами  $\alpha$  и  $\beta$  поворота наружной (СК  $Ox_1y_1z_1$ ) и внутренней (СК  $Oxuz$  — оси Резаля) рамок карданова подвеса.

Для составления прецессионных уравнений движения гироскопа определим абсолютные угловые скорости  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  СК  $Oxuz$  с учетом переносных угловых скоростей  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$ ,  $\omega_\zeta$  СК  $O\xi\eta\zeta$  в инерциальном пространстве и относительных (относительно СК  $O\xi\eta\zeta$ ) угловых скоростей гироскопа  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\beta}$ , считая  $\omega_z \ll \Omega$ ,  $H = \text{const}$ :

$$\begin{aligned}\omega_x &= -\dot{\beta} - \omega_\xi \cos \alpha - \omega_\eta \sin \alpha; \\ \omega_y &= (\dot{\alpha} + \omega_\zeta) \cos \beta - \omega_{z1} \sin \beta = \\ &= (\dot{\alpha} + \omega_\zeta) \cos \beta - \sin \beta (\omega_\eta \cos \alpha - \omega_\xi \sin \alpha).\end{aligned}$$

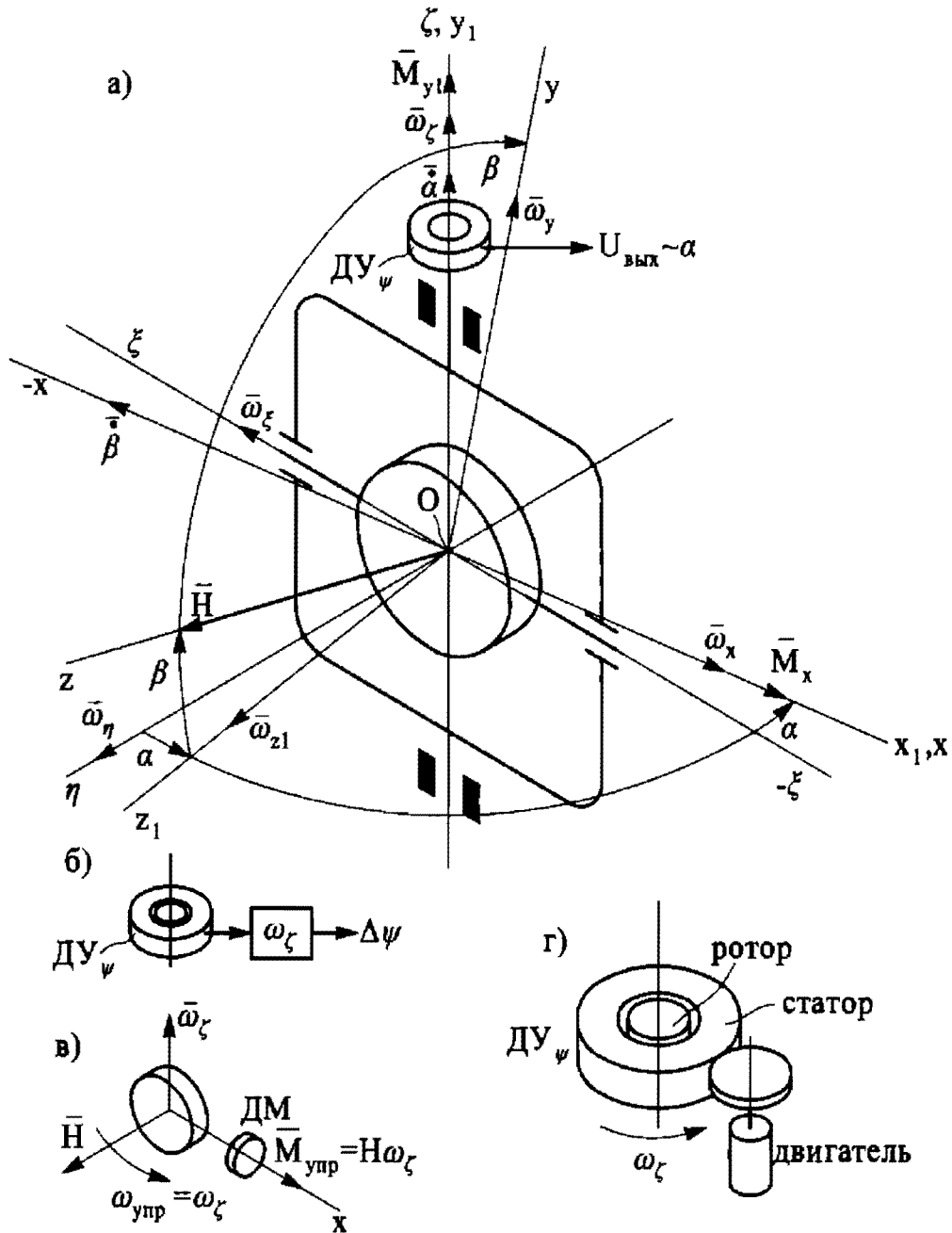


Рис. 38. К составлению уравнений движения гироскопа в подвижной системе координат  $O\xi\eta\zeta$

Прецессионные уравнения гироскопа:

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= 0; & -H\omega_y + M_x &= 0; \\ \Sigma M_{y_1} &= 0; & H \cos \beta \omega_x + M_{y_1} &= 0, \end{aligned} \quad (48)$$

где  $M_x, M_{y_1}$  — внешние моменты, действующие вокруг осей внутренней  $Ox$  и наружной  $Oy_1$  рамок подвеса.

Оценим точность измерения угла ориентации (курса) относительно оси  $Oz$  при малом  $\beta$  (см. уравнения (48)):

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\omega_z + \operatorname{tg} \beta (\omega_\eta \cos \alpha - \omega_\xi \sin \alpha) + \omega_{\text{ССП}}; \\ \dot{\beta} &= -\omega_\xi \cos \alpha - \omega_\eta \sin \alpha + \omega'_{\text{ССП}},\end{aligned}\quad (49)$$

где  $\omega_{\text{ССП}} \approx \frac{M_x}{H}$ ;  $\omega'_{\text{ССП}} \approx \frac{M_{y1}}{H}$ .

Пусть  $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ , где  $\alpha_0$  — начальное отклонение, относительно которого вектор  $\bar{N}$  отклоняется на малый угол  $\Delta\alpha$ .

Углы  $\alpha$  и  $\beta$  определим при постоянных величинах, входящих в правую часть уравнений:

$$\begin{aligned}\alpha_* &= [-\omega_z + \beta_*(\omega_\eta \cos \alpha - \omega_\xi \sin \alpha) + \omega_{\text{ССП}}]t + \Delta\alpha_b; \\ \beta_* &= (-\omega_\xi \cos \alpha_0 - \omega_\eta \sin \alpha_0 + \omega'_{\text{ССП}})t + \Delta\beta_b,\end{aligned}\quad (50)$$

где  $\Delta\alpha_b$ ,  $\Delta\beta_b$  — погрешности начальной выставки гироскопа относительно базовой СК  $O\xi\eta\zeta$  на исходной позиции (аэродроме, космодроме и т. п.).

Эти выражения определяют погрешности реализации базовой СК  $O\xi\eta\zeta$  — погрешности измерения углов ориентации (для рассматриваемого случая по курсу  $\psi$ ). Погрешность измерения курса (измерения угла  $\psi$  курса относительно СК  $O\xi\eta\zeta$ ), считая величины, входящие в правую часть уравнений постоянными, за время  $t$  можно определить выражением

$$\Delta\psi = \alpha_* = \dot{\alpha}t + \Delta\alpha_b. \quad (51)$$

Например, при  $\beta = 0$  и  $\Delta\alpha_b = 0$  для географической системы координат:  $\omega_z = U \sin \varphi = 12,44$  °/ч (на широте Москвы);  $\frac{V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi = 2$  °/ч;  $\frac{M_x}{H} = 2$  °/ч;  $t = 1$  ч. Тогда  $\Delta\psi \approx 16,5^\circ$ .

Существенный вклад в погрешность измерения курса вносит так называемая кажущаяся (или видимая) скорость ухода (дрейфа) гироскопа

$$\omega_k = -\omega_z + \operatorname{tg} \beta (\omega_\eta \cos \alpha - \omega_\xi \sin \alpha) \approx -\omega_z.$$

При заданной погрешности  $[\Delta\psi]$  измерение может быть осуществлено в течение ограниченного времени:

$$[\Delta\psi] \leq [-\omega_z + \beta_*(\omega_\eta \cos \alpha - \omega_\xi \sin \alpha) + \omega_{\text{ССП}}]t + \Delta\alpha_b. \quad (52)$$

Из выражений (50), (52) видно, что свободный гироскоп может быть только кратковременным измерителем курса. Для уменьшения погрешности  $\Delta\psi$  необходимо:

- осуществить точную начальную выставку гироскопа относительно СК  $O\xi\eta\zeta$  ( $\Delta\alpha_B \rightarrow 0, \Delta\beta_B \rightarrow 0$ ), например с помощью астросредств, системы GPS или ГЛОНАСС и др.;

- уменьшить вредные моменты  $M_x^{BP}$ , действующие вокруг оси  $Ox$  внутренней рамы;

- уменьшить угол  $\beta$  путем уменьшения  $M_{y1}$ , применения системы управления (коррекции) по углу  $\beta$  (например, ввести межрамочную коррекцию гироскопа, состоящую из датчика угла  $ДУ_\beta$  и датчика момента  $DM_{y1}$ );

- обеспечить компенсацию  $\omega_\zeta$  путем учета погрешности  $\omega_\zeta t$  при обработке информации (рис. 38, б) или с помощью приложения управляющего момента вокруг оси  $Ox$  (рис. 38, в)  $M_{упр} = H\omega_\zeta$ , направленного вдоль положительной оси  $Ox$  (т. е. датчик момента устанавливается по оси внутренней рамки гироскопа), а также путем разворота статора датчика угла  $ДУ_\psi$  со скоростью  $\omega_\zeta$  с помощью дополнительного устройства — двигателя с редуктором (рис. 38, г).

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КУРСА ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ ТРЕХСТЕПЕННОГО ГИРОСКОПА

---

---

#### Гирополукомпас и указатель направления ортодромии

Погрешности измерения курса магнитным компасом, связанные с влиянием железных корпусов объекта и элементов конструкций, внешних магнитных полей объекта, движения объекта (линейные ускорения, колебания, повороты и т. п.), вибрации основания привели в конце XIX — начале XX в. к необходимости создания курсовых гироскопических приборов и систем (гирокомпасов, гирополукомпасов и др.). Гирополукомпас (ГПК) строится на базе трехстепенного астатического гироскопа и имеет системы горизонтальной и азимутальной коррекции (рис. 39). Система горизонтальной коррекции состоит из ЧЭ электролитического уровня — маятника и исполнительного элемента — датчика момента ДМ1, создающего момент вокруг оси  $Oy_1$  наружной рамки. Базовая СК  $O\xi\eta\zeta$  — географическая.

Принцип работы ЭУ поясняет рис. 40.

При наклоне корпуса ЭУ относительно плоскости горизонта (рис. 40, б) на выходе ЭУ появляется напряжение  $U_{\text{вых}} = K_\beta \beta$  при  $\beta \leq \beta_{\text{п}}$ ; зона пропорциональности  $\beta_{\text{п}} \approx 30'$  (рис. 40, в).

Датчик момента (см. рис. 11, б) часто строится на базе постоянного магнита (ротор), который взаимодействует с обмотками (статор) и при наличии тока  $i_{\text{ДМ}} \neq 0$  создает момент вокруг оси  $Oy_1$  наружной рамки. В качестве ДМ используют также двухфазные асинхронные двигатели, работающие в заторможенном режиме, микросины и др.

ЭУ горизонтальной системы коррекции устанавливают так, что его плоскость строго параллельна оси гироскопа  $Oz$

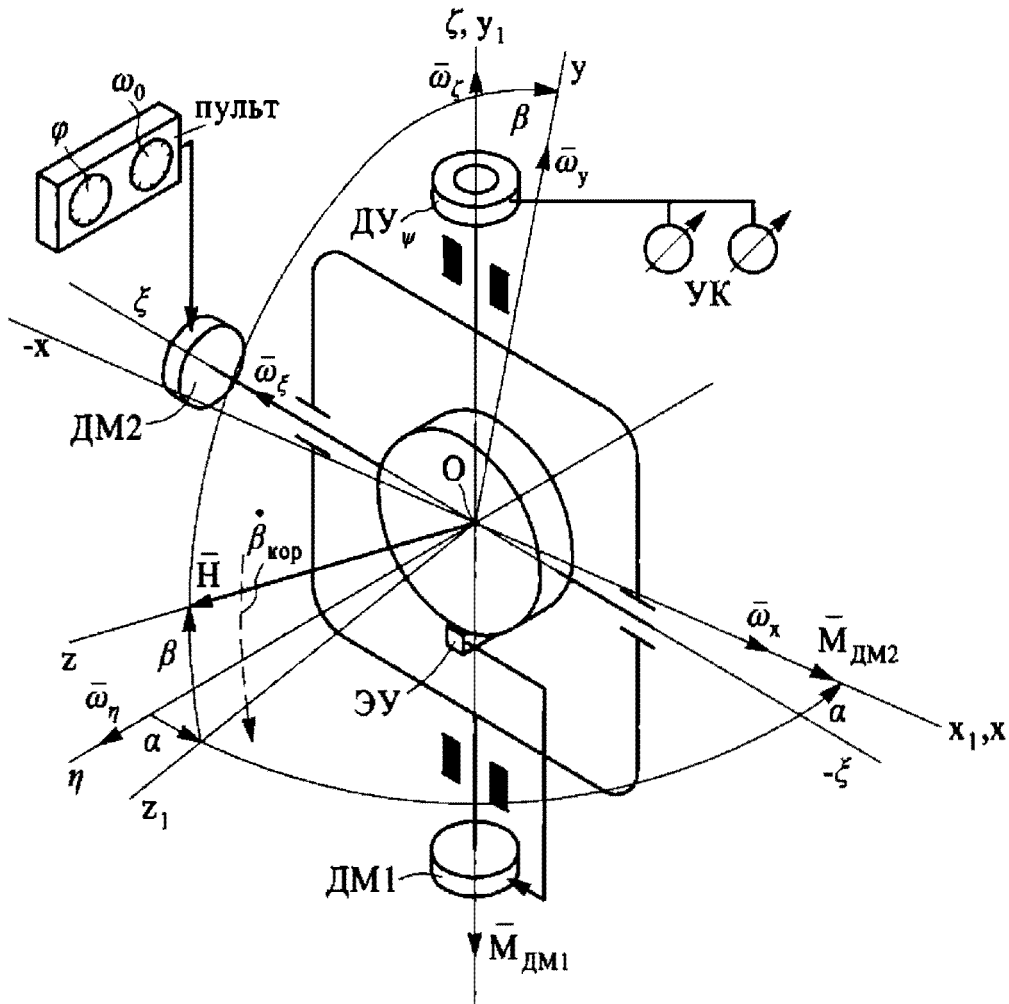


Рис. 39. Схема ГПК:

УК — указатели курса; ЭУ — электролитический уровень

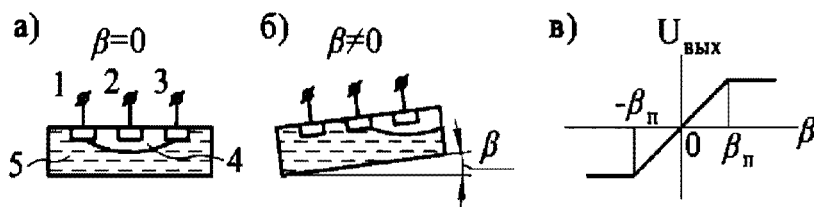


Рис. 40. Схема ЭУ:

а —  $\beta = 0$ ; б —  $\beta \neq 0$ ; в — выходная характеристика ЭУ с зоной пропорциональности  $|\beta_\pi|$

(или  $\bar{H}$ ). При отклонении вектора  $\bar{H}$  от плоскости горизонта на угол  $\beta$  возникает выходное напряжение  $U_{\text{вых}}$  ЭУ, благодаря которому ДМ1 развивает момент  $M_{\text{ДМ1}} = E\beta$  и возникает прецессия гироскопа  $\dot{\beta}_{\text{кор}} = \frac{M_{\text{ДМ1}}}{H} = \frac{E\beta}{H} = \epsilon\beta$ , где  $E$  — крутизна харак-

теристики ДМ1 по углу  $\beta$ ;  $\varepsilon = E/H$  — удельная скорость горизонтальной коррекции ГПК. При  $\beta \rightarrow 0$   $M_{\text{ДМ1}} = 0$  и ось гироскопа возвращается в исходное положение ( $\beta \approx 0$  при  $M_{y1} = 0$ ). Если вокруг оси  $Oy_1$  действует момент (момент вредных сил)  $M_{y1}$ , то очевидно, что ось гироскопа «не доходит» до плоскости горизонта; угол  $\beta_{\text{min}} = \frac{M_{y1}}{E}$ .

В зоне  $[0 \dots \beta_{\text{min}}]$  коррекционный момент  $E\beta_{\text{min}}$  не может преодолеть возмущающий момент  $M_{y1}$ , т. е.  $E\beta_{\text{min}} \leq M_{y1}$ . С увеличением  $E$  угол  $\beta_{\text{min}}$  уменьшается. Однако величину  $E$  следует ограничивать из-за больших погрешностей, возникающих при выполнении виража, угловых колебаниях, вибрации.

Определим минимальные значения удельной скорости  $\varepsilon$  коррекции из физических соображений. Скорость отклонения оси гироскопа под действием момента вредных сил  $M_{y1}$  (собственная скорость прецессии)  $\omega_{\text{ССП1max}} = \frac{M_{y1\text{max}}}{H}$ . Максимально возможная скорость поворота плоскости горизонта относительно инерциального пространства  $\omega_{\text{г}} = U + \frac{V}{R}$ , где  $U$  — суточная скорость вращения Земли;  $\frac{V}{R}$  — угловая скорость объекта (самолета) относительно Земли.

Очевидно, что  $\varepsilon \geq U + \frac{V}{R} + \omega_{\text{ССП1max}}$ ; это есть условие выбора удельной скорости горизонтальной коррекции или удельного момента ДМ:

$$E \geq H \left( U + \frac{V}{R} \right) + M_{y1\text{max}}. \quad (53)$$

Отметим, что в качестве ЧЭ системы горизонтальной коррекции может применяться (при больших ускорениях, работе на стабилизируемой платформе и т. д.) датчик угла, расположенный по оси внутренней рамки гироскопа. В этом случае угол  $\beta$  отсчитывается не от плоскости горизонта, а от плоскости  $x_1Oz_1$ , перпендикулярной к оси  $Oy_1$  наружной рамки. Такую систему коррекции иногда называют межрамочной коррекцией.

Датчик момента ДМ2 азимутальной коррекции управляется напряжением, поступающим с пульта, и компенсирует ве-

личину  $\omega_z = U \sin \varphi + \frac{V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi$ ; для средних широт  $\omega_z \approx U \sin \varphi$ . Момент ДМ2 азимутальной коррекции  $M_{\text{ДМ2}} = M_{\text{аз.к}} = H\omega_z \approx \approx HU \sin \varphi$ . Система азимутальной коррекции позволяет компенсировать постоянную составляющую  $\omega_0$  собственной скорости прецессии  $\omega_{\text{ССП}} = \omega_0 \pm \Delta\omega_{\text{ССП}}$ . Поэтому на пульте устанавливают два потенциометра со шкалами  $\varphi$  (в градусах) и  $\omega_0$  (°/ч). Величину  $\omega_0$  определяют по показаниям ГПК в сравнении с показаниями других средств (GPS, ГЛОНАСС, магнитного компаса, астрокомпа и др.) в «комфортных» условиях эксплуатации (на стоянке аэродрома или в прямолинейном полете при  $V = \text{const}$ ).

Компенсационный момент азимутальной коррекции с учетом  $\omega_0$   $M_{\text{аз.к}} = H(U \sin \varphi + \omega_0)$ .

Составим прецессионные уравнения ГПК (рис. 41) в соответствии с выражениями (48):

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= 0; & -H\omega_y + M_x^{\text{вп}} + M_{\text{аз.к}} &= 0; \\ \Sigma M_y &= 0; & H\omega_x + \frac{M_{y1}^{\text{вп}}}{\cos \beta} - \frac{M_{\text{ДМ1}}}{\cos \beta} &= 0, \end{aligned} \quad (54)$$

где  $M_{\text{аз.к}}$ ,  $M_{\text{ДМ1}}$  — моменты систем азимутальной и горизонтальной коррекции;  $M_x^{\text{вп}}$ ,  $M_{y1}^{\text{вп}}$  — вредные (возмущающие) моменты;

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\dot{\beta} - \omega_\xi \cos \alpha - \omega_\eta \sin \alpha; \\ \omega_y &= (\dot{\alpha} + \omega_z) \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha (\omega_\eta - \omega_\xi \operatorname{tg} \alpha). \end{aligned} \quad (55)$$

Пусть  $M_{\text{ДМ1}} = E\beta$ , а  $\varepsilon = \frac{E}{H}$  — удельная скорость горизонтальной коррекции. Тогда для географической СК уравнения (54) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -U \sin \varphi - \frac{V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \beta \cos \alpha \left( U \cos \varphi + \frac{V_E}{R} + \operatorname{tg} \alpha \frac{V_N}{R} \right) + \\ &+ \frac{M_x^{\text{вп}}}{H \cos \beta} + \frac{M_{\text{аз.к}}}{H \cos \beta}; \end{aligned} \quad (56)$$

$$\dot{\beta} + \varepsilon\beta = \frac{V_N}{R} \cos \alpha - \left( U \cos \varphi + \frac{V_E}{R} \right) \sin \alpha + \frac{M_{y1}^{\text{вп}}}{H \cos \beta}. \quad (57)$$



Из уравнения (57) можно найти максимальное значение погрешности по  $\beta$  при принятых допущениях:  $\beta^* = \frac{UR+V}{R\varepsilon} + \frac{\omega_{\text{ССП}}}{\varepsilon}$ , где  $\omega_{\text{ССП}} = \frac{M_{y1}^{\text{вР}}}{H}$ .

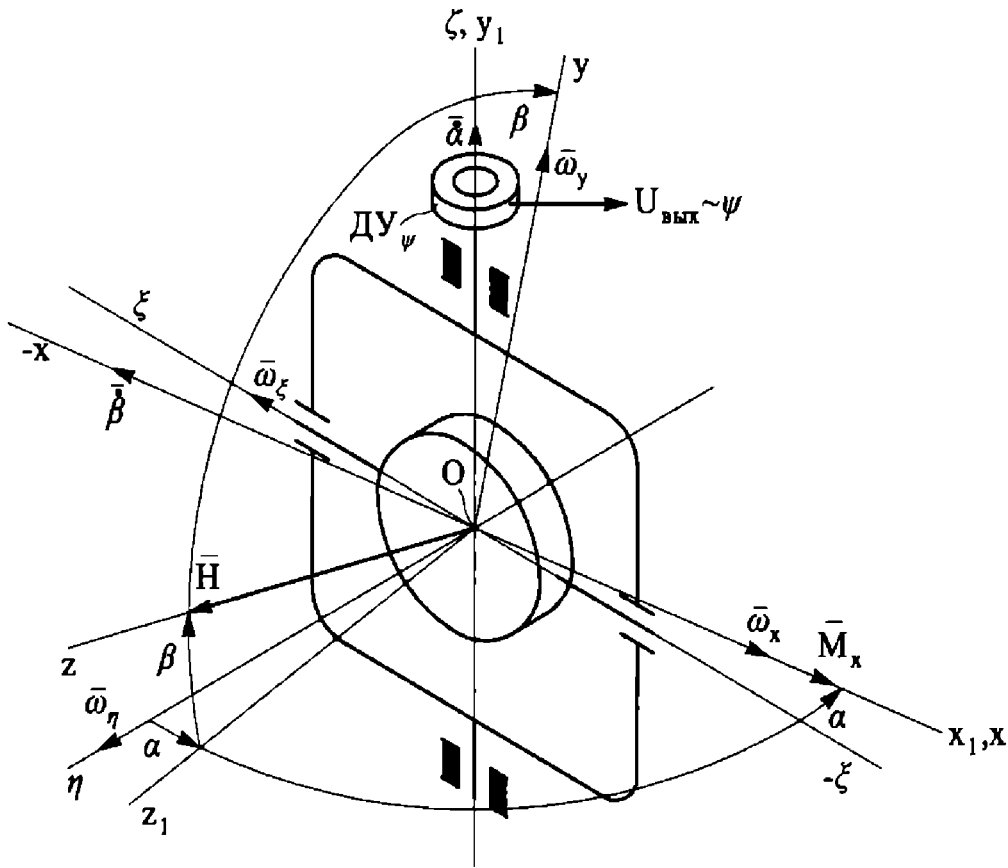


Рис. 41. К составлению уравнения движения ГПК

Считая  $\beta$  малым, а погрешность компенсации вертикальной составляющей  $\omega_z \approx U \sin \varphi$  и постоянной составляющей  $\omega_0$  равной 5 %, определим погрешность измерения курса (см. выражение (51)):

$$\Delta\psi = \dot{\alpha}\Delta t + \Delta\alpha_{\text{в}} = 0,05(U \sin \varphi + \omega_0)\Delta t + \Delta\omega_{\text{сл}}\Delta t + \Delta\alpha_{\text{в}}. \quad (58)$$

Следует отметить, что в высоких широтах ГПК пользоваться нельзя, так как при  $\varphi \rightarrow \pi/2$   $\frac{V_E}{R} \text{tg } \varphi \rightarrow \infty$ .

Навигацию в высоких широтах осуществляют по ортодромии. В этом случае компенсационный момент  $M_{\text{аз.к}} = H \left( U \sin \varphi + \frac{V_{\xi 0}}{R} \text{tg } \delta \right) \approx HU \sin \varphi$ .

Кинематическая схема указателя направления ортодромии (УНО) соответствует схеме ГПК, но начальная выставка УНО должна осуществляться по ортодромии; базовая система координат  $O\xi_0\eta_0\zeta_0$  — ортодромическая. Поскольку  $\delta \leq 2^\circ$ , формулу (58) можно использовать для приближенного расчета погрешностей УНО.

В схемах ГПК и УНО погрешности, вызванные наличием  $\omega_z$ , можно скомпенсировать в бортовом вычислителе. В ряде конструкций курсовых гиросприборов отказываются от азимутальной коррекции, применяя систему разворота статора курсового датчика угла со скоростью  $\omega_z$  (см. рис. 38, з). В бескарданных системах ориентации (БСО) схемы ГПК или УНО моделируются. ГПК (УНО) находят широкое применение в авиации и наземных объектах.

### Гироскомпас. Гироорбитант

Простой маятниковый гироскомпас представляет собой трехстепенной гироскоп, центр масс которого смещен на величину  $l$  в направлении, перпендикулярном к вектору  $\vec{H}$ ; при этом ось наружной рамки направлена по вертикали (рис. 42). Для демпфирования колебаний оси ГК применяют демпферы [2] (на рисунке не показаны).

Составим прецессионные уравнения движения ГК на неподвижном основании. В качестве базовой выберем географическую СК  $O\xi\eta\zeta$  (индекс «г» опускаем). Определим проекции абсолютных угловых скоростей на оси СК  $Oxyz$  для малых  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\omega_\xi = 0$ ,  $\omega_z = U \sin \varphi$ ,  $\omega_\eta = U \cos \varphi$ ):

$$\begin{aligned}\omega_x &\approx -\dot{\beta} - \alpha U \cos \varphi; \\ \omega_y &\approx \dot{\alpha} + U \sin \varphi - \beta U \cos \varphi.\end{aligned}\tag{59}$$

Проекции внешних моментов на оси СК  $Oxyz$ :

$$\begin{aligned}M_x &\approx Gl\beta + D_\beta \dot{\beta} + M_x^{\text{BP}}; \\ M_y &= M_{y1}^{\text{BP}} - D_\alpha \dot{\alpha},\end{aligned}$$

где  $Gl$  — маятниковость;  $D_\alpha$ ,  $D_\beta$  — удельные демпфирующие моменты;  $M_x^{\text{BP}}$ ,  $M_{y1}^{\text{BP}}$  — вредные моменты.

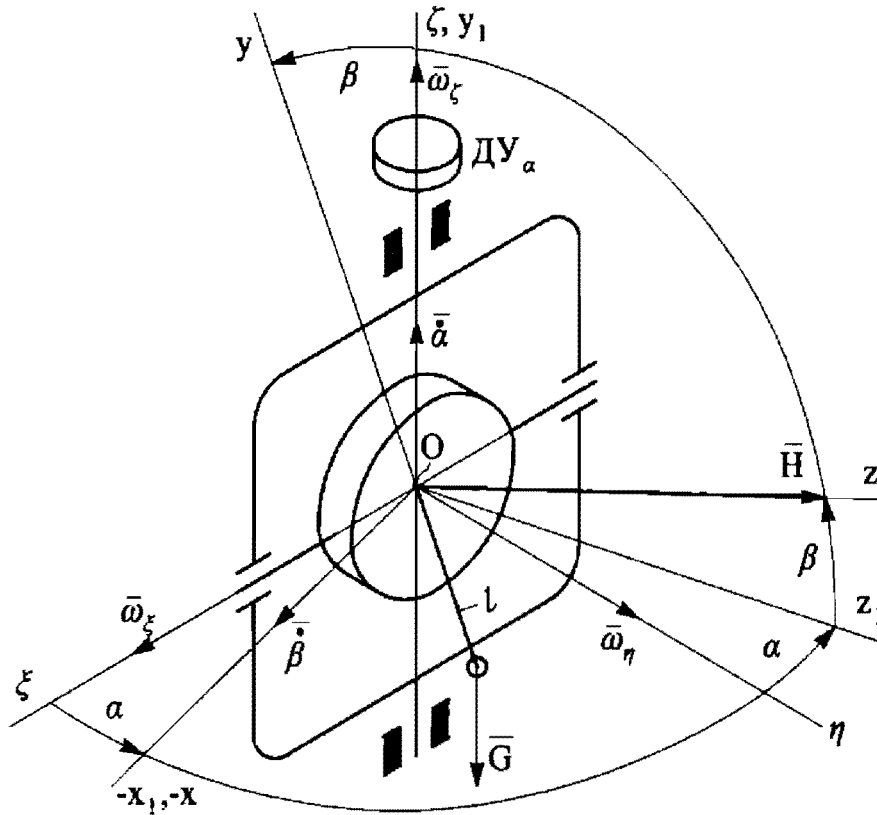


Рис. 42. Схема маятникового ГК

Прецессионные уравнения ГК (см. выражения (48)):

$$\begin{aligned} -H(\dot{\alpha} + U \sin \varphi - \beta U \cos \varphi) + Gl\beta + D_\beta \dot{\beta} + M_x^{\text{BP}} &= 0; \\ -H(\dot{\beta} + \alpha U \cos \varphi) + M_{y1}^{\text{BP}} - D_\alpha \dot{\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

Полагая  $D_\beta = 0$ ,  $D_\alpha = 0$ ,  $Gl/H = \varepsilon$ ,  $\omega_{\text{ссп}} = M_x^{\text{BP}}/H$ ,  $\omega'_{\text{ссп}} = M_{y1}^{\text{BP}}/H$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} - (U \cos \varphi + \varepsilon)\beta &= -U \sin \varphi + \omega_{\text{ссп}}; \\ \dot{\beta} + \alpha U \cos \varphi &= \omega'_{\text{ссп}}. \end{aligned} \quad (60)$$

Определим период колебаний ГК. Характеристическое уравнение системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} s & -(\varepsilon + U \cos \varphi) \\ U \cos \varphi & s \end{vmatrix} = s^2 + (\varepsilon + U \cos \varphi)U \cos \varphi = 0.$$

Корень характеристического уравнения мнимый:  $s_{1,2} = \pm i\sqrt{\varepsilon U \cos \varphi + (U \cos \varphi)^2}$ , период колебаний  $T = 2\pi/\omega_0$ , где  $\omega_0 = \sqrt{\varepsilon U \cos \varphi + (U \cos \varphi)^2}$ . Колебания оси ГК необходимо демпфировать.

Статическое решение, характеризующее установившийся режим ГК:

$$\alpha^* = \frac{\omega'_{\text{ССП}}}{U \cos \varphi}; \quad \beta^* = \frac{U \sin \varphi - \omega_{\text{ССП}}}{\varepsilon + U \cos \varphi}. \quad (61)$$

Если  $M_{y1}^{\text{ВР}} = 0$ , то  $\alpha^* = 0$ , т. е. в идеальном случае ось ГК направлена на север и приподнята над плоскостью горизонта на малый (при  $\varepsilon \gg U$ ) угол  $\beta^* \approx \frac{U \sin \varphi}{\varepsilon + U \cos \varphi} \approx \frac{U \sin \varphi}{\varepsilon}$  (при  $M_x^{\text{ВР}} = 0$ ).

На рис. 43 показана схема приведения на экваторе оси ГК в плоскость меридиана из положения 1, развернутого на  $90^\circ$  относительно меридиана.

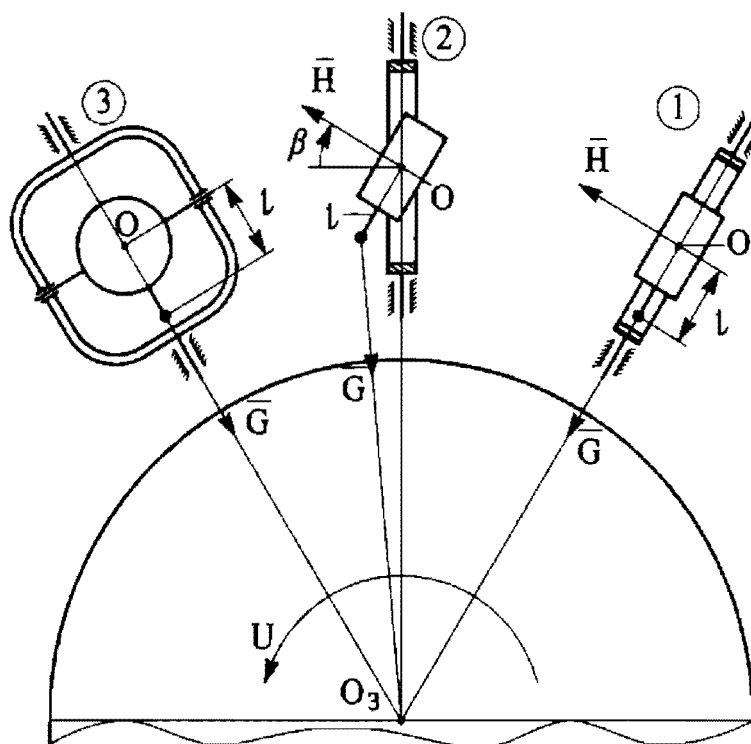


Рис. 43. Схема, поясняющая приведение оси ГК в плоскость меридиана (на экваторе)

При вращении Земли возникает момент  $G/l\beta$  (положение 2), вызывающий прецессию гироскопа со скоростью  $\varepsilon\beta$  к положению 3, в котором ось гироскопа лежит в плоскости меридиана. При этом ось гироскопа направлена на север и приподнята над плоскостью горизонта на угол  $\beta^*$ .

Реализация ГК связана прежде всего с минимизацией момента  $M_{y1}$ , поэтому создание ГК на базе гироскопа в традици-

онном кардановом подвесе невозможно. Поскольку гироскоп несбалансирован, при движении с ускорением возникают большие баллистические погрешности.

В начале XX в. при разработке морского гирокомпаса, в которой участвовали выдающиеся инженеры и ученые (среди них Эйнштейн), впервые осуществлены блистательные идеи: плавающая в специальной жидкости герметичная сфера, внутри которой находятся два кинематически связанных гироскопа с разнонаправленными векторами  $\vec{H}$  (в частности, для уменьшения погрешности ГК при качке), бесконтактные токоподводы, электромагнитный подвес сферы, система настройки на период Шулера (для уменьшения баллистических погрешностей) и др.

Попытка создать ГК для авиации не имела успеха; известны лишь ГК для транспортной авиации.

Принцип работы ГК успешно используется, например, для начальной выставки баллистических ракет (БР) на старте. Схема ГК реализуется на базе трехосного гиросtabilизатора с прецизионными поплавковыми интегрирующими гироскопами и акселерометрами. Поясним принцип реализации такого ГК на базе астатического гироскопа с системой управления, состоящей из акселерометра А (рис. 44) и датчиков момента ДМ1 и ДМ2.

Проекции абсолютных угловых скоростей на оси СК  $Oxuz$  определяются выражениями (59). Моменты датчиков пропорциональны углу  $\beta$  ( $E_1\beta$  и  $E_2\beta$ ); удельные скорости коррекции  $\varepsilon_{1(2)} = \frac{E_{1(2)}}{H}$ .

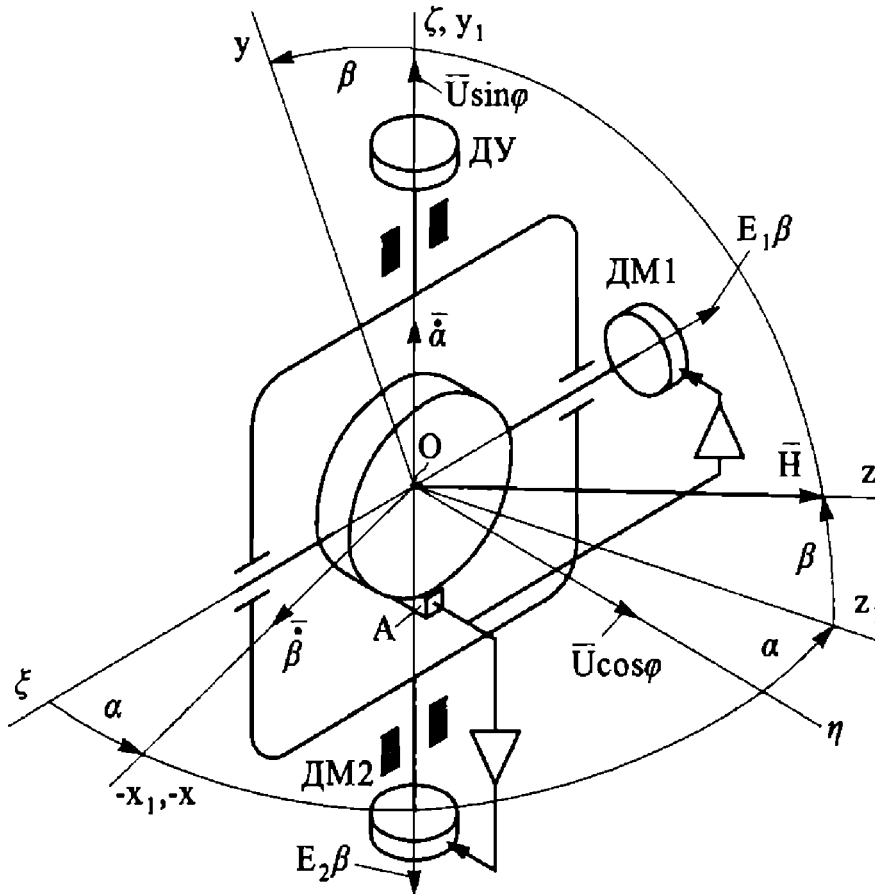
Прецессионные уравнения ГК ( $D_\alpha = 0, D_\beta = 0$ ):

$$\begin{aligned} -H(\dot{\alpha} + U \sin \varphi - \beta U \cos \varphi) + E_1\beta + M_x^{BP} &= 0; \\ -H(\dot{\beta} + \alpha U \cos \varphi) - E_2\beta + M_{y1}^{BP} &= 0 \end{aligned} \quad (62)$$

или

$$\dot{\alpha} - (\varepsilon_1 + U \cos \varphi)\beta = \omega_{\text{ССП}} - U \sin \varphi, \quad (63)$$

т. е. уравнение (63) совпадает с первым уравнением (60) простого маятникового ГК.



**Рис. 44.** Схема реализации ГК на базе астатического гироскопа с системой управления (коррекции), состоящей из акселерометра А, усилителей и датчиков момента ДМ1 и ДМ2

Второе уравнение запишем в виде

$$\dot{\beta} + \varepsilon_2 \beta + \alpha U \cos \varphi = \omega'_{\text{ССП}}, \quad (64)$$

откуда

$$\alpha^* = \frac{\omega'_{\text{ССП}}}{U \cos \varphi} - \frac{\varepsilon_2}{U \cos \varphi} \beta^*. \quad (65)$$

При малых  $\beta^*$  и  $\varepsilon_2 \ll U \cos \varphi$   $\alpha^* = \frac{\omega'_{\text{ССП}}}{U \cos \varphi}$ , т. е. совпадает с первым выражением (61); рассматриваемый гидроприбор выполняет роль ГК.

Угол  $\beta^*$  определим из уравнения (63):  $\beta^* = \frac{U \sin \varphi - \omega_{\text{ССП}}}{\varepsilon_1 + U \cos \varphi}$ . При  $\varepsilon_1 \gg U$   $\beta^* = \frac{U \sin \varphi}{\varepsilon_1} - \frac{\omega_{\text{ССП}}}{\varepsilon_1}$ .

Определим период колебаний системы. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} s & -(\varepsilon_1 + U \cos \varphi) \\ U \cos \varphi & s + \varepsilon_2 \end{vmatrix} = \\ = s^2 + \varepsilon_2 s + U \cos \varphi (\varepsilon_1 + U \cos \varphi) = 0.$$

Уравнение, в частности, показывает ( $\varepsilon_2 \neq 0$ ), что ДМ2 обеспечивает необходимое затухание колебаний ГК.

Период колебаний ГК  $T = 2\pi/\omega_0$ , где  $\omega_0$  — собственная частота незатухающих колебаний,  $\omega_0 = \sqrt{\varepsilon_1 U \cos \varphi + (U \cos \varphi)^2}$

Создание системы начальной выставки БР требует прецизионных гироскопов ( $\approx 0,001^\circ/\text{ч}$ ).

Кинематическая схема, приведенная на рис. 44, используется для построения гироорбитанта (ГО), или орбитального ГК. Направляющим моментом ГО является гироскопический момент, вызываемый угловой скоростью  $\bar{\Omega}_{\text{орб}}$  (в отличие от гироскопического момента ГК, обусловленного вращением Земли со скоростью  $\bar{U}$ ).

Ось наружной рамки ГО (рис. 45) выставляется по направлению к центру Земли, например, с помощью «инфракрасной» вертикали [2]. В качестве ЧЭ систем коррекции используется датчик угла  $DУ_\beta$  внутренней рамки, в качестве исполнительных элементов — датчики моментов ДМ1 и ДМ2, развивающие моменты  $E_1\beta$  и  $E_2\beta$ . Гироприбор при отключении системы коррекции (двухрежимный прибор) работает как свободный гироскоп системы ориентации, определяющей углы отклонения ИСЗ.

Выберем базовые СК:  $O\zeta$  — по касательной к орбите ИСЗ,  $O\eta$  — по перпендикуляру к плоскости орбиты.

Уравнения движения ГО совпадают с (62), если  $U \cos \varphi$  заменить на  $\Omega_{\text{орб}}$ , а вместо  $U \sin \varphi$  подставить нуль. Ось ГО устанавливается (после погашения колебаний  $\varepsilon_2 \neq 0$ ) перпендикулярно к плоскости орбиты с точностью (см. формулу (65)) до

$$\alpha^* = \frac{\omega'_{\text{ССП}}}{\Omega_{\text{орб}}} + \frac{\varepsilon_2 \omega_{\text{ССП}}}{\Omega_{\text{орб}}(\varepsilon_1 + \Omega_{\text{орб}})}$$

3. Определение курса объекта с помощью трехстепенного гироскопа

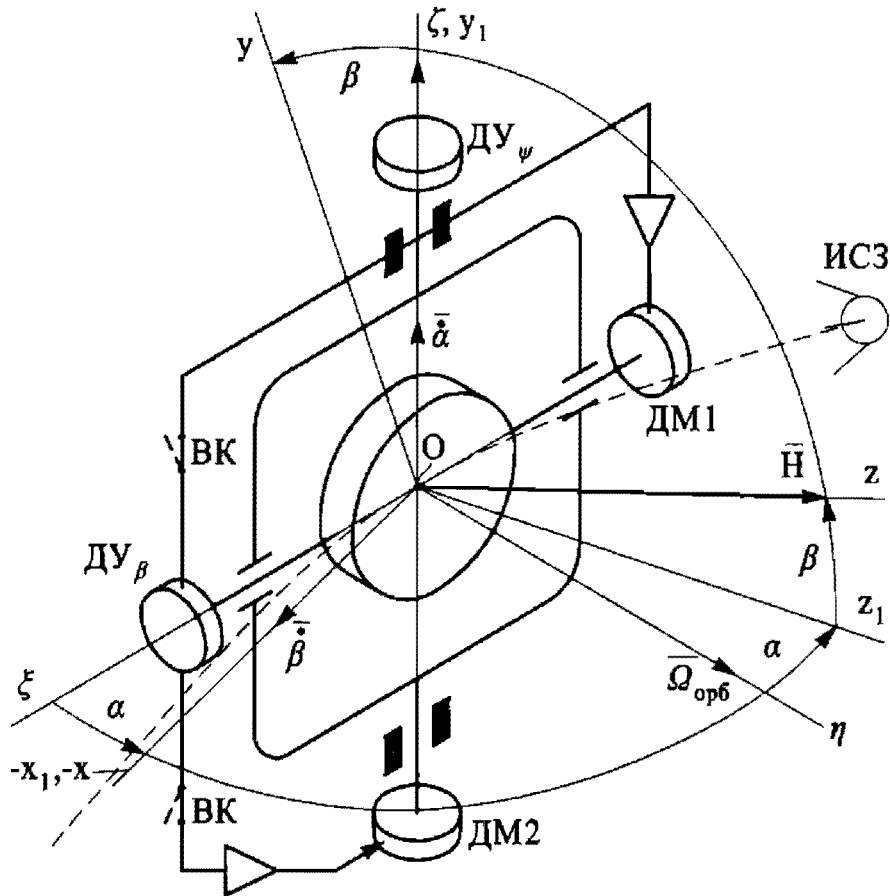


Рис. 45. Схема ГО:

ВК — выключатели; ИСЗ — искусственный спутник Земли

Вторая составляющая погрешности связана с наличием системы демпфирования ( $\varepsilon_2 \neq 0$ ) собственных колебаний ГО (при  $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$ ).



#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ ОРИЕНТАЦИИ ОБЪЕКТА ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕРТИКАЛИ С ПОМОЩЬЮ ГИРОСКОПА

---

---

##### Маятник

Определение с помощью маятника истинной вертикали (ИВ) места на подвижном объекте невозможно при наличии ускорения  $\dot{V}$  (рис. 46). Маятник занимает положение так называемой кажущейся вертикали (КВ), характеризующееся углом

$$\beta_k = \operatorname{arctg} \frac{\dot{V}}{g} \approx \frac{\dot{V}}{g}. \quad (66)$$

Маятник (рис. 46, а) направлен по равнодействующей инерционной силы  $m\bar{V}$  и силы тяжести  $\bar{G}$ . Уравнение движения маятника для малого  $\beta$

$$ml^2\ddot{\beta} + d\dot{\beta} + mgl\beta = m\dot{V}l + M, \quad (67)$$

где  $m, l$  — масса и длина маятника;  $d$  — коэффициент демпфирования;  $M$  — вредный момент, действующий вокруг оси подвеса.

При  $M = 0$  преобразуем уравнение (67) к стандартному виду:

$$\ddot{\beta} + 2\xi\omega_0\dot{\beta} + \omega_0^2\beta = \frac{\dot{V}}{l},$$

где  $\xi = \frac{d}{2m\omega_0 l^2}$  — относительная степень затухания колебаний маятника;  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  — собственная частота незатухающих колебаний маятника с периодом  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ .

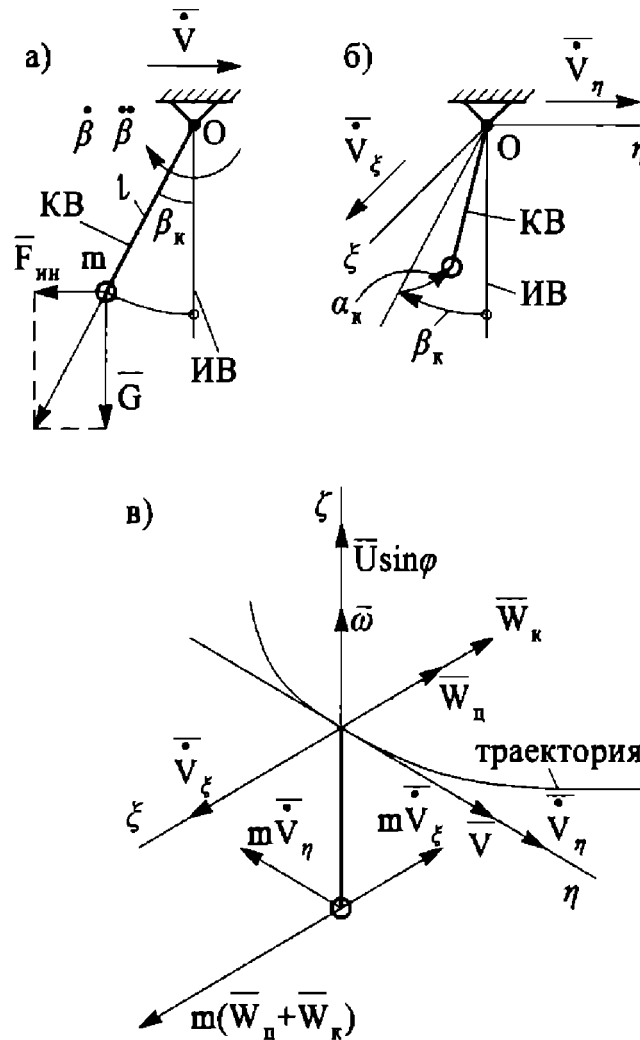


Рис. 46. К определению кажущейся вертикали

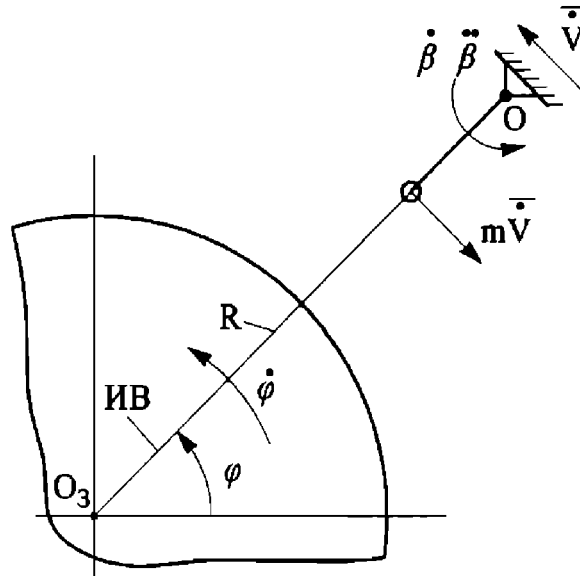
Установившееся значение  $\beta_k = \dot{V}/g$ . Если маятник сферический, то при наличии ускорений объекта маятник занимает положение KB, характеризуемое углами  $\beta_k \approx \dot{V}_\eta/g$ ,  $\alpha_k \approx \dot{V}_\xi/g$  (рис. 46, б).

Вертикальная составляющая суточного вращения Земли является причиной возникновения кориолисова ускорения  $W_k = 2VU \sin \varphi$ , следовательно, происходит отклонение маятника на величину  $\alpha_W = -2VU \sin \varphi/g$  (на рис 46, в  $O\xi\eta\zeta$  — траектория СК).

Выраж (поворот) объекта с угловой скоростью  $\omega$  вызовет под действием центробежной силы  $F_\omega = mW_\omega = mV\omega$  отклонение маятника на  $\alpha_\omega = -V\omega/g$ .

Эту погрешность называют навигационной. Длина маятника ограничена, поэтому период колебаний мал. Вследствие этого короткопериодический маятник практически мгновенно занимает положение КВ, реагируя на возмущения.

В начале XX в. Максом Шулером предложена схема невозмущаемого маятника с периодом  $T = 84,4$  мин. На рис. 47 приведена схема подвеса маятника, движущегося по меридиану с ускорением  $\dot{V}$ , вызывая угловое ускорение маятника  $\ddot{\beta} = \dot{V}/l$ .



**Рис. 47.** К пояснению возможности реализации маятника Шулера

Истинная вертикаль перемещается с угловой скоростью  $\dot{\phi} = \frac{V}{R+h} \approx \frac{V}{R}$  и угловым ускорением  $\ddot{\phi} = \frac{\dot{V}}{R}$  (здесь  $h \ll R$  — высота полета). Если обеспечить условие  $\ddot{\beta} = \ddot{\phi}$ , то, очевидно, маятник, занимавший в начале движения положение ИВ, будет сохранять его и далее, несмотря на наличие ускорения  $\dot{V}$  объекта, т. е. маятник становится невозмущаемым по отношению к  $\dot{V}$  при  $l = R$ . Период маятника Шулера  $T = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 84,4$  мин.

Примером технической реализации маятника Шулера является ИСЗ. Математический или физический маятник не может удовлетворить требованиям по точности, предъявляемым к приборам измерения вертикали, однако возможно его моделирование с помощью гироприборов, включая и маятник Шулера.



Тогда

$$\dot{\alpha} = -\omega_{\eta} + \omega_{\text{ССП}};$$

$$\dot{\beta} = \omega_{\xi} + \omega'_{\text{ССП}},$$

где  $\omega_{\text{ССП}} = \frac{M_x}{H}$ ;  $\omega'_{\text{ССП}} = \frac{M_{y1}}{H}$ .

При постоянных  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $V$ ,  $\omega_{\text{ССП}}$ ,  $\omega'_{\text{ССП}}$  за время  $t$  погрешность СГ

$$\begin{aligned} \alpha &= (u \cos \varphi \cos \psi + \omega_{\text{ССП}})t; \\ \beta &= \left( u \cos \varphi \sin \psi + \frac{V}{R} + \omega'_{\text{ССП}} \right) t. \end{aligned} \quad (68)$$

Видно, что СГ можно использовать только в течение ограниченного времени. Оценка погрешностей СГ более сложная и зависит от условий эксплуатации (с учетом кардановых погрешностей, вращения основания, линейных и вибрационных перегрузок, точности начальной выставки и т. д.).

Прецизионные СГ используют в САУ баллистических ракет; это гиригоризонт (для определения угла тангажа) и гировертикант (для определения углов крена и рыскания).

### Гиромаятник

Гироскопический маятник (ГМ) представляет собой трехстепенной гироскоп (рис. 49) с вертикально направленным вектором  $\bar{H}$ , центр масс которого смещен на величину  $l$  («тяжелый» гироскоп).

Рассмотрим поведение ГМ на неподвижном основании, пользуясь прецессионными уравнениями. Проекции абсолютных угловых скоростей на оси Резаля:  $\omega_x = \dot{\beta}$ ,  $\omega_y = \dot{\alpha} \cos \beta$ .

Моменты сил тяжести при малых  $\alpha$  и  $\beta$  вокруг осей  $Ox$  и  $Oy_1$  равны соответственно  $-Gl\beta$  и  $-Gl\alpha$  (рис. 49, а).

Уравнения движения ГМ вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\begin{aligned} -H\dot{\alpha} - Gl\beta + M_x &= 0; \\ H\dot{\beta} - Gl\alpha + M_{y1} &= 0; \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} + \varepsilon\beta &= \omega_{\text{ССП}}; \\ \dot{\beta} - \varepsilon\alpha &= \omega'_{\text{ССП}}, \end{aligned} \quad (70)$$

4. Определение углов ориентации объекта относительно вертикали

где  $\omega_{\text{ССП}}$ ,  $\omega'_{\text{ССП}}$  — ССП, вызванная вредными моментами  $M_x$  и  $M_{y_1}$  соответственно;  $\varepsilon = \frac{Gl}{H}$  — удельная скорость прецессии ГМ.

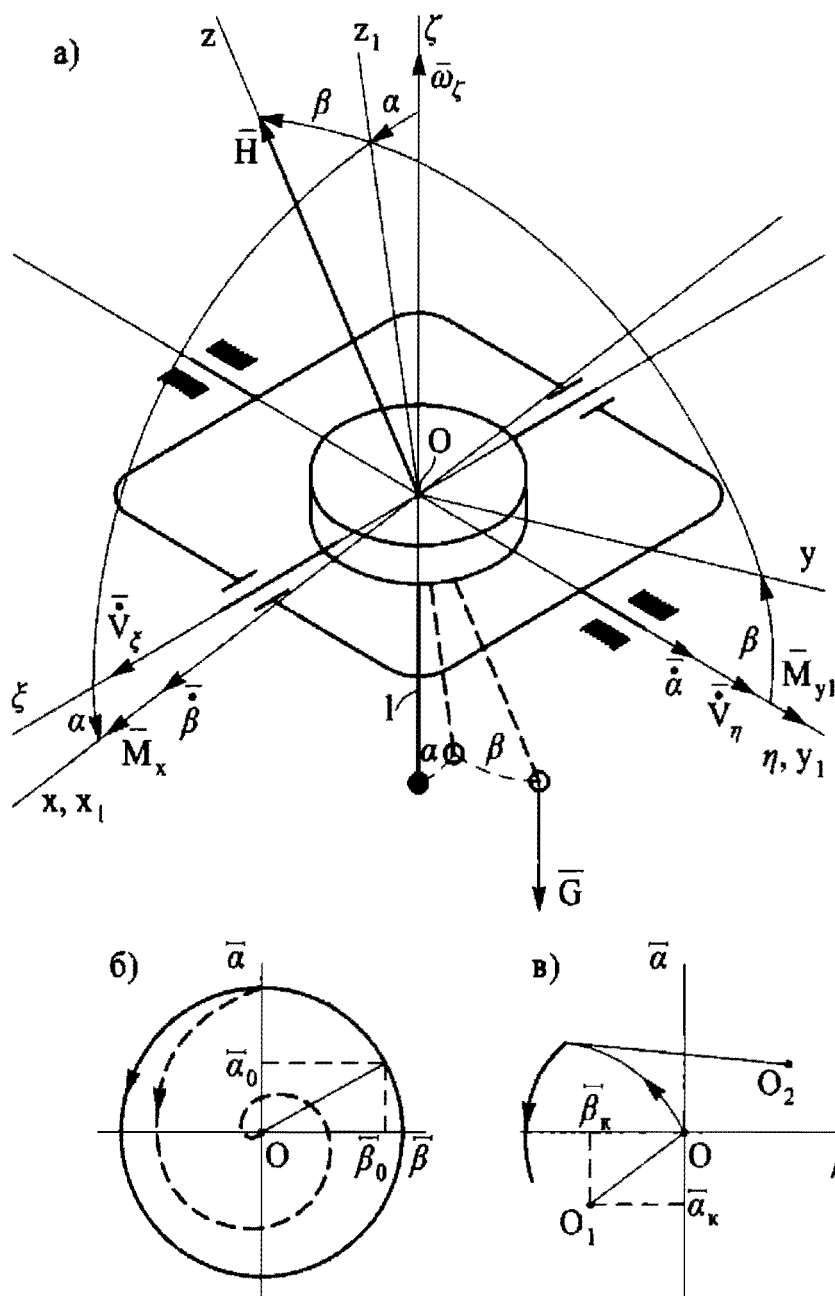


Рис. 49. Гиромаятник

Собственное движение системы определяется следующими уравнениями ( $M_x = M_{y_1} = 0$ ):

$$\dot{\alpha} + \varepsilon\beta = 0;$$

$$\dot{\beta} - \varepsilon\alpha = 0.$$

Характеристическое уравнение системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} s & \varepsilon \\ -\varepsilon & s \end{vmatrix} = s^2 + \varepsilon^2 = 0.$$

Корень характеристического уравнения  $s = \pm i\varepsilon$ , следовательно, ГМ совершает колебания с частотой  $\varepsilon$ . Пусть начальное положение оси ГМ не совпадает с ИВ, т. е. при  $t = 0$   $\alpha = \alpha_0$ ,  $\beta = \beta_0$ .

Запишем решение по  $\beta$  в виде  $\beta = C_1 \sin \varepsilon t + C_2 \cos \varepsilon t$ .

При  $t = 0$   $C_2 = \beta_0$ , тогда

$$\alpha = \frac{\dot{\beta}}{\varepsilon} = C_1 \cos \varepsilon t - \beta_0 \sin \varepsilon t.$$

При  $t = 0$   $C_1 = \alpha_0$ .

В полученных решениях исключим время:  $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$ , где  $R^2 = \alpha_0^2 + \beta_0^2$ .

На картинной плоскости траектория апекса представляет собой окружность (рис. 49, б), т. е. при  $\alpha_0 \neq 0$ ,  $\beta_0 \neq 0$  ось гироскопа описывает конус. При введении демпфирующих моментов  $D\dot{\alpha}$  и  $D\dot{\beta}$  траектория стягивается к центру окружности, т. е. ось гироскопа довольно долго приходит в положение ИВ (см. штриховую линию на рис. 49, б). При наличии вредных моментов (70) центр окружности смещается в точку с координатами  $\alpha_* = -\frac{\omega'_{\text{ССП}}}{\varepsilon}$ ,  $\beta_* = \frac{\omega_{\text{ССП}}}{\varepsilon}$ . Это большие погрешности, так как значение  $\varepsilon$  мало.

Уравнения движения ГМ при ускорении приобретают вид (в уравнениях (69) добавляются моменты вокруг оси  $Ox - m\dot{V}_\eta \dot{l}$ , вокруг оси  $Oy - m\dot{V}_\xi \dot{l}$  и  $\omega_{\text{ССП}} = 0$ ,  $\omega'_{\text{ССП}} = 0$ ):

$$\dot{\alpha} + \varepsilon\beta = -\varepsilon\beta_k;$$

$$\dot{\beta} - \varepsilon\alpha = -\varepsilon\alpha_k,$$

где  $\beta_k \approx \frac{\dot{V}_\eta}{g}$ ;  $\alpha_k \approx \frac{\dot{V}_\xi}{g}$ .

Центр окружности траектории апекса смещается в точку  $O_1$  (см. рис. 49) с координатами  $(-\alpha_k, -\beta_k)$ . Рассмотрим пример, когда начальное положение оси гироскопа находится в ИВ. При наличии ускорения апекс движется по траектории радиусом  $OO_1$ . Допустим, ускорение изменилось так, что центром

траектории становится т.  $O_2$ , радиус траектории —  $MO_2$  и т. д. Видно, что при наличии ускорений объекта ГМ пользоваться практически нельзя.

Оценим возможность настройки ГМ на период Шулера в соответствии с условиями  $\varepsilon = \sqrt{g/R}$ ,  $Gl/H = \sqrt{g/R}$  и  $H = Gl\sqrt{R/g}$ .

Значение  $H$  должно быть очень большим, а это практически неосуществимо, к тому же при больших габаритах гироскопа возрастают возмущающие моменты. В силу указанных причин ГМ не применяется. Однако интересно, что идеи использования модели ГМ в БИНС существуют. Известны случаи построения на базе ГМ низкочастотных стендов, имитирующих морскую качку корабля. Условия невозмущаемости гиromаятника наиболее полно раскрыты Ю.К. Жбановым.

### Гироскопическая вертикаль

Гировертикаль (ГВ) представляет собой трехстепенной астатический гироскоп с вертикально направленным вектором  $\bar{H}$  и системой маятниковой коррекции (рис. 50, а). Система коррекции включает системы продольной и поперечной коррекции, каждая из которых состоит из ЧЭ — маятника, выполненного в виде ЭУ (рис. 50, б) или акселерометра, и исполнительного элемента — датчика момента.

ЭУ1 и ЭУ2 установлены на корпусе гироскопа. При отклонении  $\bar{H}$  (гироскопа) от ИВ на угол  $\alpha$  на выходе ЭУ1 появляется сигнал, зависящий от  $\alpha$  (рис. 50, в) и подаваемый на ДМ1, который развивает коррекционный момент  $M_k(\alpha)$ . Этот момент вызывает прецессию гироскопа (см. рис. 50, в):

$$\dot{\alpha}_{\text{кор}} = \frac{M_k(\alpha)}{H}.$$

Для пропорциональной характеристики (рис. 50, г) в диапазоне углов  $\pm 30'$

$$\dot{\alpha}_{\text{кор}} = \frac{E\alpha}{H} = \varepsilon\alpha,$$



где  $E$  — крутизна характеристики системы коррекции;  
 $\varepsilon = E/H$  — удельная скорость коррекции.

Для релейной характеристики (рис. 50, д) скорость коррекции постоянна:

$$\dot{\alpha}_{\text{кор}} = M_0/H = m_0.$$

При отсутствии моментов сил трения, разбалансировки и других вредных моментов гироскоп приходит в положение ИВ (на неподвижном основании):  $\alpha = 0$ .

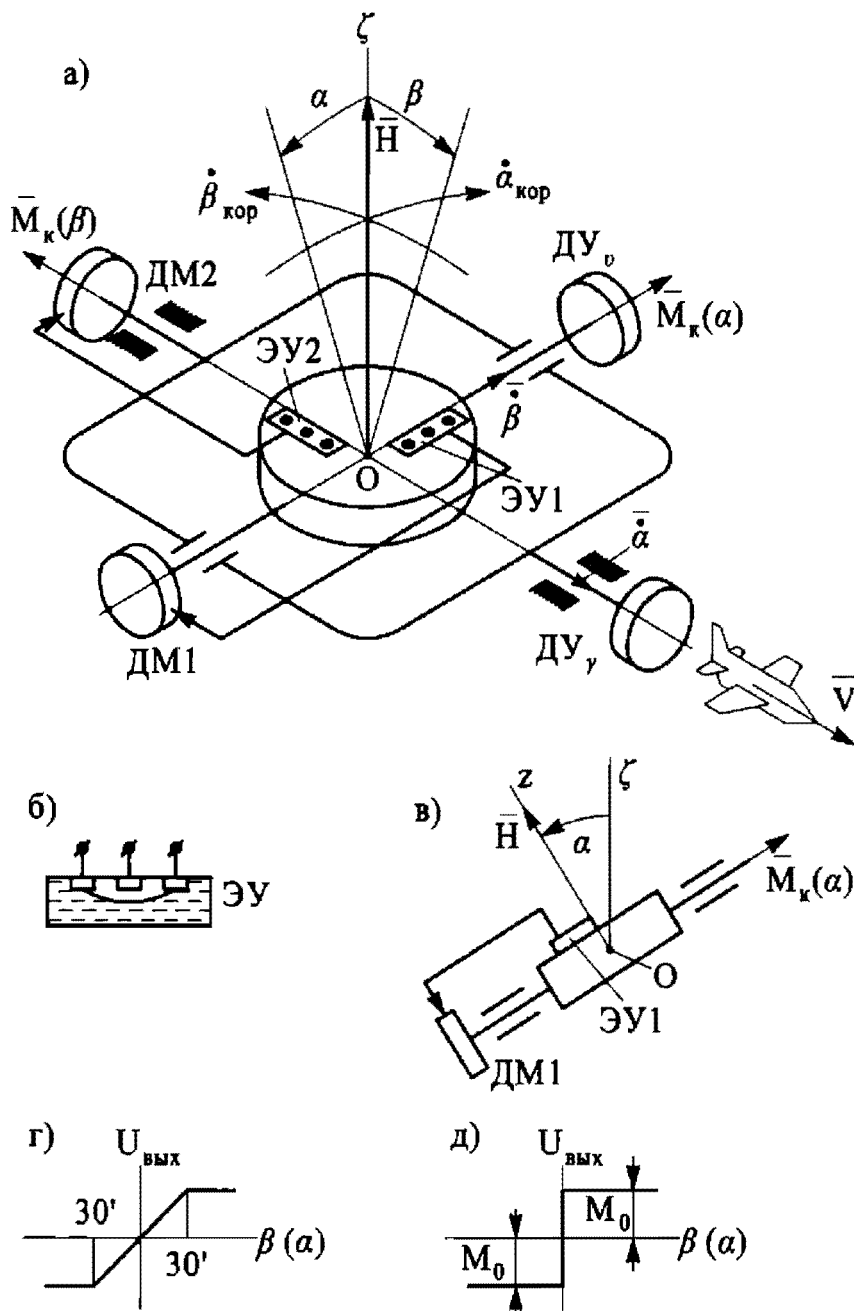


Рис. 50. К пояснению принципа работы ГВ

Аналогично коррекция осуществляется по каналу  $\beta$ . Информация по крену  $\gamma$  и тангажу  $\vartheta$  снимается с ДУ $_{\gamma}$  и ДУ $_{\vartheta}$ .

Уравнения движения ГВ летательного аппарата (ЛА) составим в траекторной СК  $O\xi\eta\zeta$  (см. выражения (47)). Проекции абсолютных угловых скоростей на оси  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 51):

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\beta} + \omega_{\xi} \cos \alpha - \omega_{\zeta} \sin \alpha; \\ \omega_y &= (\dot{\alpha} + \omega_{\eta}) \cos \beta + \sin \beta (\omega_{\zeta} \cos \alpha + \omega_{\xi} \sin \alpha).\end{aligned}$$

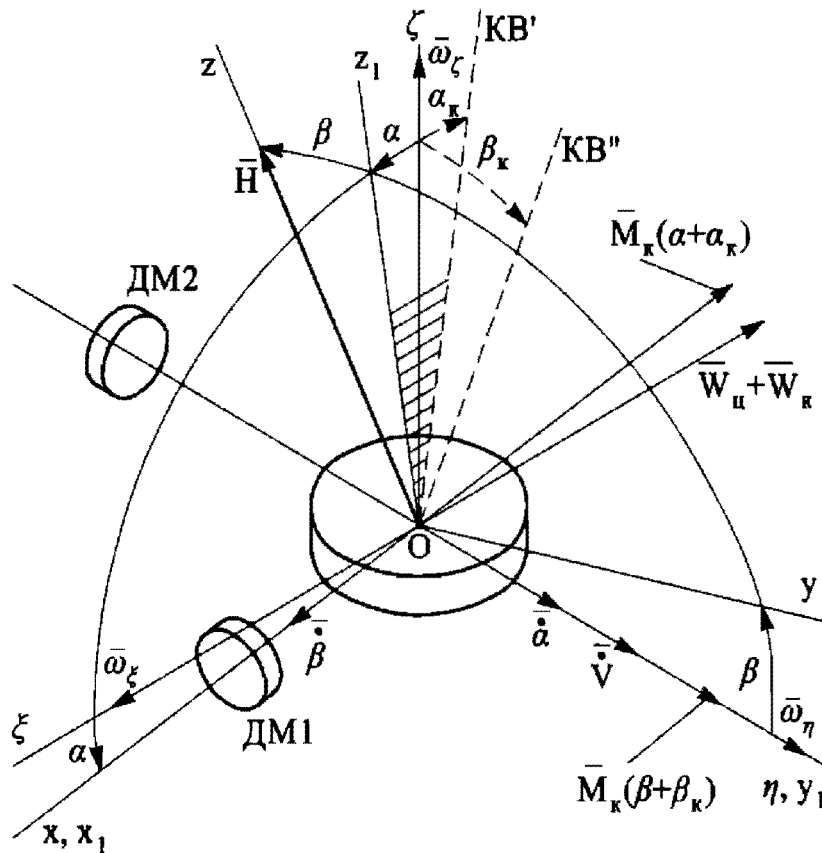


Рис. 51. К составлению уравнений движения ГВ

Определим моменты пропорциональной коррекции с учетом  $\bar{W}_{\zeta}, \bar{W}_k, \bar{V}_{\eta} = \bar{V}, \bar{V}_{\xi} = 0$ ; моменты коррекции пропорциональны углам между  $\bar{H}$  и КВ (проекции КВ' и КВ'' на рис. 51):

$$M_k(\alpha, \alpha_k) = -E(\alpha + \alpha_k) = -E \left( \alpha + \frac{V\omega}{g} + \frac{2VU \sin \varphi}{g} \right);$$

$$M_k(\beta, \beta_k) = E(\beta + \beta_k) = E \left( \beta + \frac{\dot{V}}{g} \right).$$

Прецессионные уравнения движения ГВ:

$$-H\omega_y - E \left( \alpha + \frac{V\omega}{g} + \frac{2VU\sin\varphi}{g} \right) + M_x = 0;$$

$$H\omega_x \cos\beta + E \left( \beta + \frac{\dot{V}}{g} \right) + M_{y1} = 0.$$

Тогда

$$\dot{\alpha} + \varepsilon\alpha = -\omega_\eta - \varepsilon \frac{V(\omega + 2U\sin\varphi)}{g} + \omega_{\text{ССП}};$$

$$\dot{\beta} + \varepsilon\beta = -\omega_\xi - \varepsilon \frac{\dot{V}}{g} + \omega'_{\text{ССП}}.$$
(71)

Правые части уравнений (71) определяют погрешности ГВ:

- скоростную  $-\frac{\omega_\eta}{\varepsilon}, -\frac{\omega_\xi}{\varepsilon}$ ;
- навигационную  $-\frac{V\omega}{g}$ ;
- погрешность от кориолисова ускорения  $-\frac{2VU\sin\varphi}{g}$ ;
- баллистическую  $-\varepsilon \frac{\dot{V}}{g}$ ;
- ССП  $\omega_{\text{ССП}} = \frac{M_x}{H}, \omega'_{\text{ССП}} = \frac{M_{y1}}{H}$ .

Погрешность, вызванную кориолисовым ускорением, и навигационную в дальнейшем будем называть навигационной погрешностью ГВ.

Собственное движение ГВ характеризуется уравнениями

$$\dot{\alpha} + \varepsilon\alpha = 0;$$

$$\dot{\beta} + \varepsilon\beta = 0.$$

Решения этих уравнений при  $t = 0$ :  $\alpha = \alpha_0$ ;  $\beta = \beta_0$ ;  $\alpha = \alpha_0 e^{-\varepsilon t}$ ;  $\beta = \beta_0 e^{-\varepsilon t}$ .

Траектория апекса на картинной плоскости представляет собой прямую  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$ , т. е. ось ГВ кратчайшим путем движется к ИВ. Поэтому пропорциональную коррекцию иногда называют радиальной, или квазиупругой.

Статическое решение (71) при  $\dot{V} = 0$  характеризует погрешности ГВ:

$$\alpha_* = -\frac{U \cos \varphi \cos \psi}{\varepsilon} - \frac{V(\omega + 2U \sin \varphi)}{g} + \frac{\omega_{\text{ССП}}}{\varepsilon};$$

$$\beta_* = -\frac{U \cos \varphi \sin \psi + \frac{V}{R}}{\varepsilon} + \frac{\omega'_{\text{ССП}}}{\varepsilon}.$$

Скоростные и навигационные погрешности могут быть учтены при обработке информации. Возмущающие моменты  $M_x$  и  $M_{y1}$  должны быть сведены к минимуму для уменьшения погрешности, обусловленной ССП.

С увеличением  $\varepsilon$  вышеуказанные погрешности уменьшаются. Однако при наличии ускорений и увеличении  $\varepsilon$  погрешности ГВ будут возрастать. Если значение  $\varepsilon$  велико, то ось ГВ будет практически мгновенно «отслеживать» положение маятника и смысл применения гироскопа с такой коррекцией пропадает.

Рассмотрим работу продольного канала ГВ при ускорении  $\dot{V}$  (рис. 52).

При  $\dot{V} = \text{const}$  маятник занимает положение КВ, характеризующееся углом  $\beta_k = \frac{\dot{V}}{g}$  (см. рис. 46, а). Момент коррекции  $M_k = E(\beta + \beta_k)$ .

Пренебрегая скоростными погрешностями и ССП, получим в соответствии с (71)

$$\dot{\beta} + \varepsilon\beta = -\varepsilon \frac{\dot{V}}{g}. \quad (72)$$

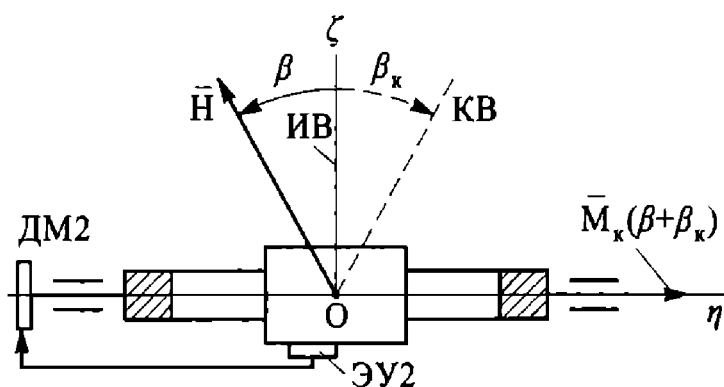


Рис. 52. К определению погрешности ГВ при  $\dot{V} = \text{const}$

Пусть  $t = 0, \beta_0 = 0$ . Скорость прецессии гироскопа  $\dot{\beta}_V = -\varepsilon \frac{\dot{V}}{g}$ . За время  $t$  угол достигает значения  $\beta_V = -\varepsilon t \frac{\Delta V}{tg} = -\varepsilon \frac{\Delta V}{g}$ .

Для релейной коррекции  $\beta_V = \sqrt{\frac{m_0 \Delta V}{g}}$ , где  $m_0 = \frac{M_0}{H}$ . При значительных  $\varepsilon$  и  $m_0$  возникают большие баллистические погрешности ГВ.

Однако скорость коррекции должна быть больше максимальной угловой скорости вертикали в пространстве  $U + \frac{V}{R}$  и скорости прецессии  $\omega_{\text{ССП max}}$  (см. условие (53)):

$$\varepsilon > K \left( U + \frac{V}{R} + \omega_{\text{ССП max}} \right),$$

где  $K = 1,0 \dots 1,8$  — коэффициент.

При больших продольных ускорениях коррекцию по углу  $\beta$  отключают (например, при взлете или посадке самолета). Тогда погрешность ГВ определяется по формулам (68). Выполнение виража приводит к существенным погрешностям ГВ, в этом случае отключают поперечную коррекцию по углу  $\alpha$ .

При низкочастотных фугоидных колебаниях (с периодом  $T \approx 100$  с) скорость самолета может быть описана выражением

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \Delta V_\phi \sin v_\phi t; \\ \dot{V} &= \Delta V_\phi v_\phi \cos v_\phi t, \end{aligned}$$

где  $\Delta V_\phi, v_\phi$  — амплитуда и частота фугоидных колебаний самолета.

Уравнение (72) по каналу  $\beta$

$$\dot{\beta} + \varepsilon \beta = \varepsilon \frac{\Delta V_\phi v_\phi}{g} \cos v_\phi t.$$

Решение этого уравнения:

$$\beta = \lambda \frac{\Delta V_\phi v_\phi}{g} \cos(v_\phi t - \chi_\phi).$$

Максимальная погрешность при  $\lambda \rightarrow 1, \chi_\phi \rightarrow 0$

$$\beta_{\phi} = \frac{\Delta V_{\phi} v_{\phi}}{g}$$

Эту погрешность трудно устранить [2], однако ее можно учесть при обработке информации.

В 1932 г. Е.Б. Левенталь предложил схему ГВ с интегральной коррекцией, при которой появляется возможность настройки ГВ на период Шулера.

В такой невозмущаемой ГВ баллистические погрешности отсутствуют. Рассмотрим физический смысл интегральной коррекции. На рис. 53 показан канал коррекции по  $\beta$  при полете ЛА по меридиану. В качестве ЧЭ системы коррекции применяется акселерометр А. ИВ перемещается в абсолютном пространстве с угловой скоростью  $\omega_{ИВ} = \frac{v}{R}$  (высотой полета пренебрегаем).

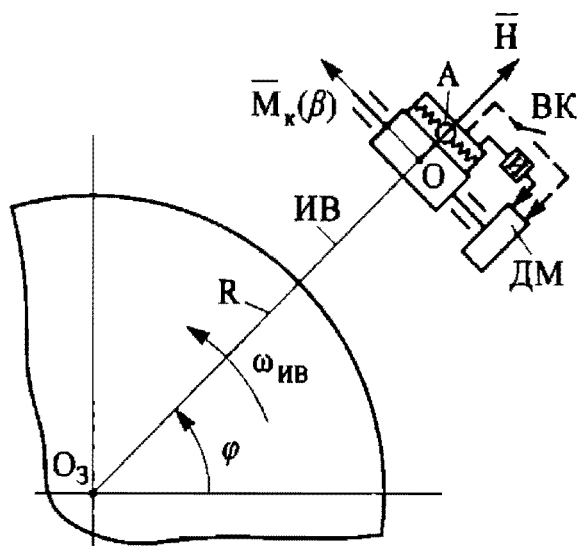


Рис. 53. К пояснению принципа работы ГВ с интегральной коррекцией

Если в начальный момент вектор  $\bar{H}$  расположен по ИВ, то гироскоп необходимо корректировать с угловой скоростью коррекции

$$\omega_k = \frac{M_k(\beta)}{H} = \omega_{ИВ};$$

$$M_k(\beta) = \frac{H}{R} \int \dot{v} dt = \frac{Hg}{R} \int \frac{\dot{v}}{g} dt = \frac{Hg}{R} \int \beta_k(t) dt = E_{и} \int \beta_k(t) dt,$$

где  $E_{и}$  — удельный момент интегральной коррекции.

Таким образом, сигнал с акселерометра, пропорциональный  $\beta_k(t) dt$ , необходимо интегрировать.

На рис. 53 сигнал с акселерометра А (сплошная линия) подается на ДМ через интегратор И. Для демпфирования колебаний ГВ используется позиционная коррекция (показана штриховой линией). Однако в этом случае появляются погрешности

ГВ, пропорциональные второй производной от скорости ЛА, поэтому предусмотрен выключатель ВК коррекции на некоторых режимах полета. На рис. 54 дана схема ГВ с интегральной коррекцией.

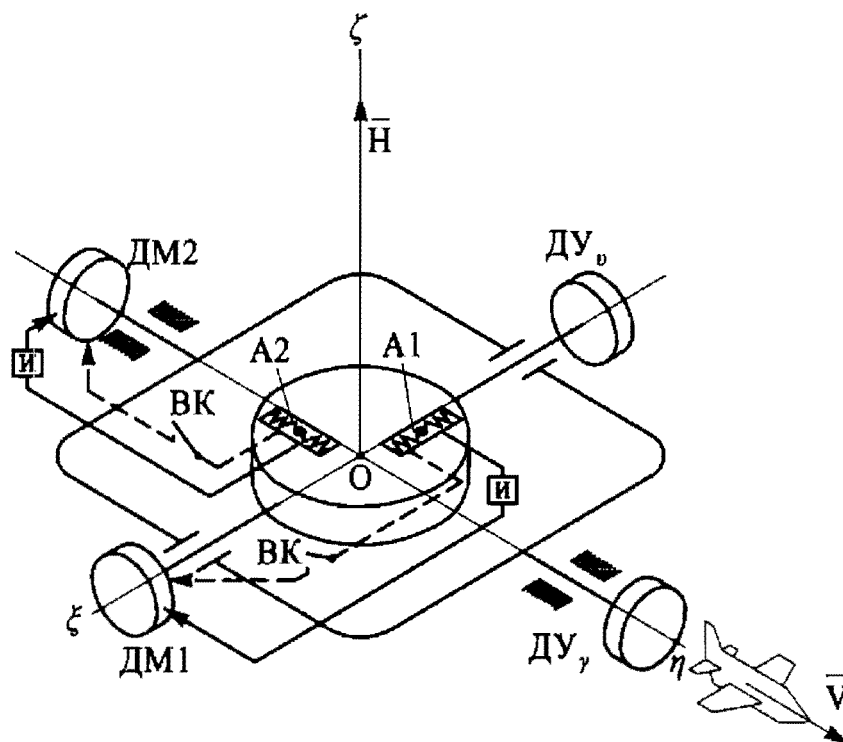


Рис. 54. Схема ГВ с интегральной коррекцией

Ускорение объекта с учетом  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$ ,  $\omega_\zeta$  (рис. 55):

$$W_\xi = \dot{V}_\xi - V_\eta \omega_\zeta; \quad W_\eta = \dot{V}_\eta + V_\xi \omega_\zeta;$$

$$W_\zeta = g_0 + V_\eta \omega_\xi - V_\xi \omega_\eta = g_0 - \frac{V^2}{R},$$

где  $\omega_\xi = -\frac{V_\eta}{R}$ ;  $\omega_\eta = \frac{V_\xi}{R}$ ;  $V = \sqrt{V_\xi^2 + V_\eta^2}$ ;  $\bar{g}_0$  — вектор, условно направленный вверх;  $R$  — радиус Земли.

Углы, характеризующие положение КВ (КВ' и КВ'' — проекции КВ):

$$\alpha_k \approx \frac{W_\xi}{W_\zeta}; \quad \beta_k \approx \frac{W_\eta}{W_\zeta}.$$

При приближенных вычислениях ( $\omega_\zeta = 0$ ):  $\alpha_k \approx \frac{V_\xi}{g}$ ,  $\beta_k \approx \frac{V_\eta}{g}$ .  
Формирование коррекционных моментов происходит в зави-





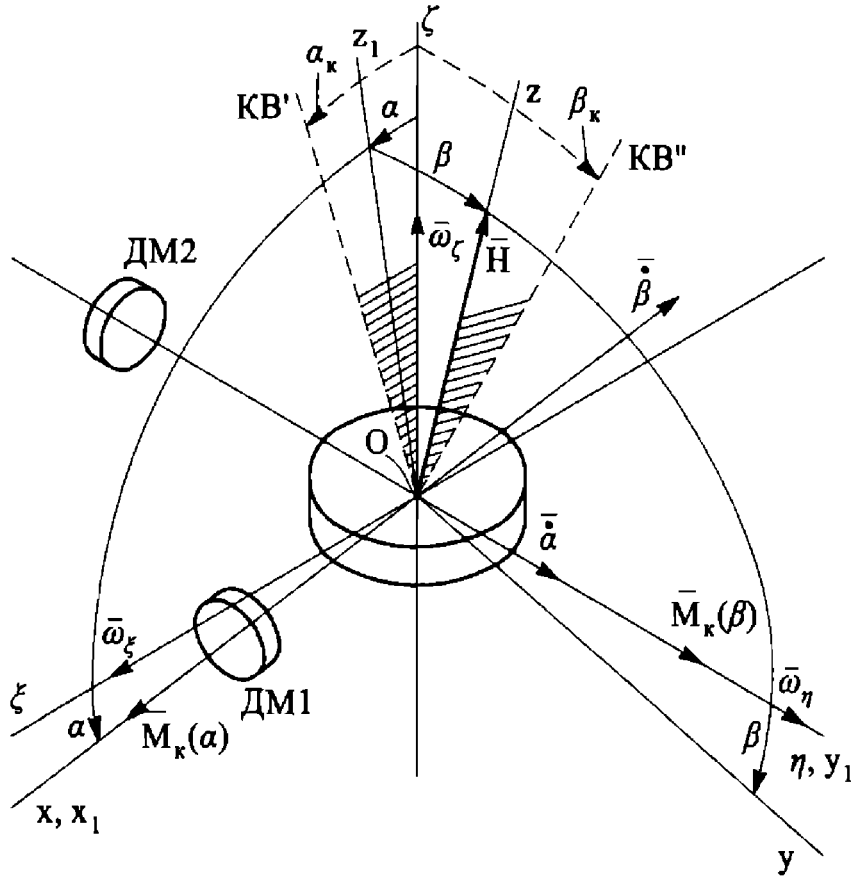


Рис. 56. К выводу уравнений движения ГВ с интегральной коррекцией

После дифференцирования получим

$$\ddot{\beta} + \varepsilon \dot{\beta} + \varepsilon_u \beta = \dot{V}_\eta \left( \frac{\varepsilon_n}{g} - \frac{1}{R} \right) + \varepsilon \frac{\ddot{V}_\eta}{g} + \dot{\omega}_{\text{ССП}}(t);$$

$$\ddot{\alpha} + \varepsilon \dot{\alpha} + \varepsilon_u \alpha = \dot{V}_\xi \left( \frac{\varepsilon_n}{g} - \frac{1}{R} \right) + \varepsilon \frac{\ddot{V}_\xi}{g} + \dot{\omega}'_{\text{ССП}}(t).$$

Движение ГВ с интегральной коррекцией представляет собой колебания с собственной частотой  $\omega_0 = \sqrt{\varepsilon_n}$ . Позиционная коррекция демпфирует колебания ГВ; при этом собственная частота  $\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ , где  $\xi = 0,5\varepsilon/\sqrt{\varepsilon_n}$  — степень затухания. При  $\varepsilon \neq 0$  возникают погрешности ГВ  $\frac{\varepsilon \ddot{V}_\eta}{\varepsilon_n g}$  и  $\frac{\varepsilon \ddot{V}_\xi}{\varepsilon_n g}$ , поэтому при больших  $\ddot{V}_\eta, \ddot{V}_\xi$  позиционную коррекцию отключают.

При постоянных моментах  $M_x$  и  $M_{y_1}$   $\dot{\omega}_{\text{ССП}}(t) = 0$ ,  $\dot{\omega}'_{\text{ССП}}(t) = 0$ .

#### 4. Определение углов ориентации объекта относительно вертикали

Если осуществить настройку ГВ с интегральной коррекцией  $\frac{\varepsilon_{\text{и}}}{g} = \frac{1}{R}$ , то баллистические погрешности ГВ исчезают.

Собственная частота  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$ , а период колебаний  $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$  — период Шулера.

ГВ с интегральной коррекцией является базой для построения ИНС.

В БИНС ГВ с интегральной коррекцией моделируется при использовании информации, поступающей, например, с трех ДУС и трех акселерометров. В последние десятилетия получают развитие бескарданные системы навигации и ориентации с применением миниатюрных микромеханических, волоконно-оптических, твердотельных волновых гироскопов и др. Основные теоретические соотношения, полученные выше при анализе измерения углов крена и тангажа, остаются основополагающими при построении бескарданных систем.

## 5. ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ

### Гиригоризонт и гиривертикант

Гиригоризонт и гиривертикант — свободные гироскопы, которые используются в системе управления БР (рис. 57). Выходной сигнал с ДУ2 (рис. 58) по углу  $\vartheta$  тангажа БР подается в систему управления, которая обеспечивает полет БР по заданной траектории (см. рис. 57) на ее активном участке (с работающим двигателем). При достижении программных значений угла  $\vartheta_{пр}$  тангажа и скорости  $\bar{V}_{пр}$  двигатель БР отключается (т.  $N$  на рис. 57). Для системы стабилизации БР в плоскости стрельбы  $P$  (по углу рыскания  $\psi$  и крену  $\gamma$ ) используют сигнала-

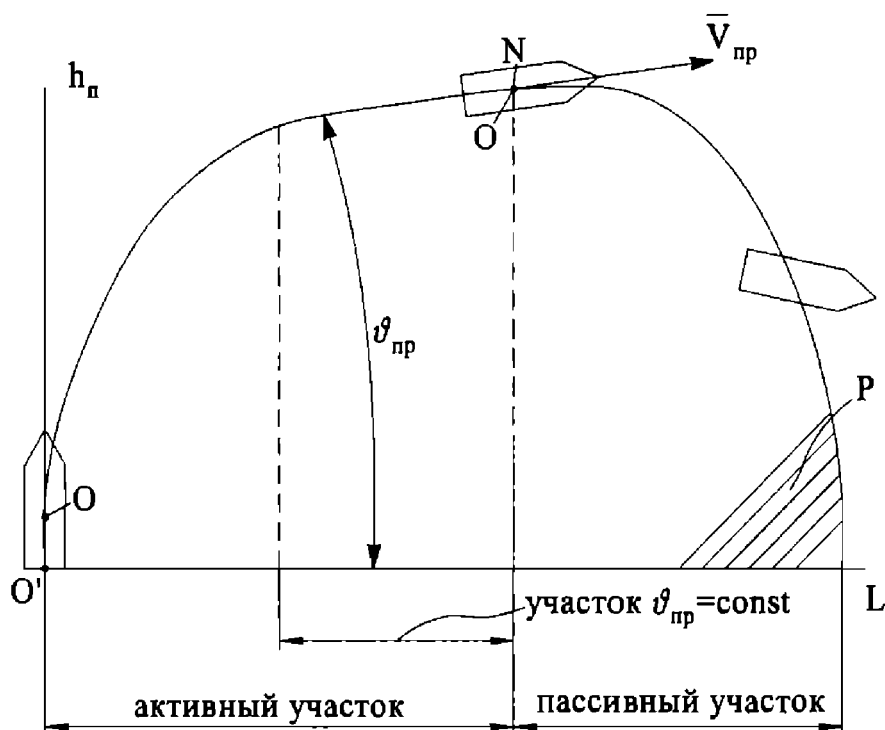


Рис. 57. Траектория БР

лы гировертиканта ( $ДУ_\psi$  и  $ДУ_\gamma$ ). Определение скорости  $\bar{V}$  осуществляется с помощью гироскопического прибора. На старте осуществляют начальную выставку гироскопического прибора и гировертиканта с помощью систем  $ДУ_i - ДМ_i$ , где  $i = 1, 2, 3, 4$ .

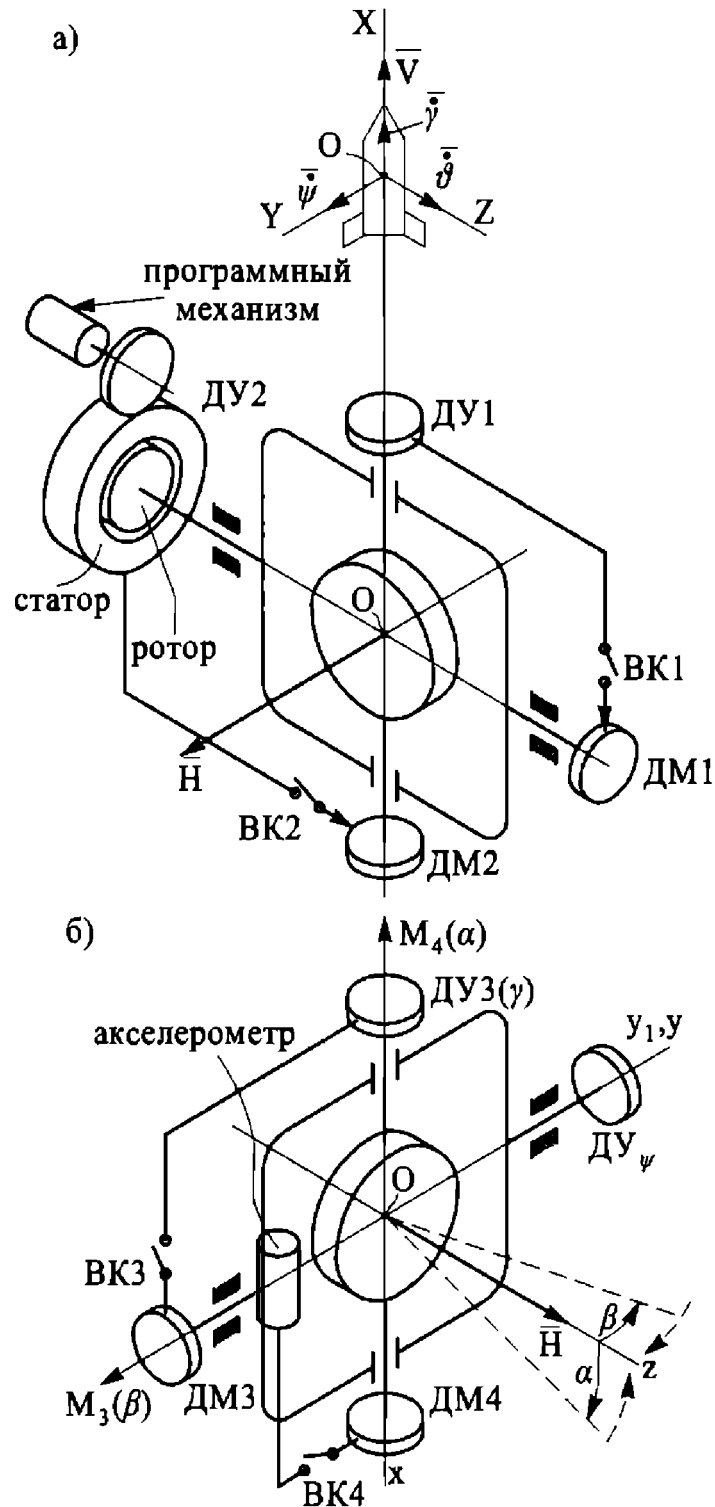


Рис. 58. Схемы гироскопического прибора (а) и гировертиканта (б)

Например, имеется отклонение гировертиканта по углу  $\alpha$ , тогда замыкается ключ ВК4; сигнал с акселерометра (маятника) подается на ДМ4, который развивает момент  $\bar{M}_4(\alpha)$ , вызывающий прецессию гироскопа таким образом, что вектор  $\bar{H}$  движется к плоскости горизонта (на рис. 58, б показано штриховой линией).

При  $\alpha = 0$  (без учета погрешностей)  $M_4(\alpha) = 0$ , прецессия прекращается.

Отклонения по углу  $\beta$  при включенном ВК3 вызывает момент  $M_3(\beta)$ . Гироскоп прецессирует под действием  $\bar{M}_3(\beta)$  до тех пор, пока  $\beta = 0$ ; при этом вектор  $\bar{H}$  перпендикулярен к оси наружной рамки гировертиканта. Если есть погрешность ЧЭ (акселерометра и ДУЗ) и возмущающие моменты, действующие вокруг осей карданова подвеса, то возникают погрешности начальной выставки.

Пусть задана по каналу крена погрешность  $\Delta\beta_0$  датчика угла ДУ<sub>γ</sub>З; имеется возмущающий момент  $M_{y1}$ , который уравновешивается моментом системы начальной выставки  $M_{н.в} = E\beta_*$ , где  $E$  — удельный момент (крутизна моментной характеристики) пропорциональной системы начальной выставки ДУ<sub>γ</sub>З—ДМЗ. Отсюда  $\beta_* = \frac{M_{y1}}{E}$  и суммарная погрешность начальной выставки по каналу  $\beta$

$$\Delta\beta_{\text{в}} = \Delta\beta_0 + \beta_*.$$

Значение  $E$  определяется условием устойчивости, оно может быть  $> 10^6$ .

В полете БР выключатели ВК1—ВК4 отключаются. Погрешность измерения углов  $\vartheta$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$  во многом зависит от ССП гироскопа, погрешности начальной выставки и определяет погрешность измерения положения БР в инерциальной системе координат, которую «материализуют» гиروهоризонт и гировертикант на борту. Для повышения их точности осуществляют алгоритмическую компенсацию погрешностей в соответствии с выбранной моделью.

### Гироскопический прибор линейных ускорений

Гироскопический прибор (ГИ) линейных ускорений (ЛУ) предназначен для определения скорости ракеты путем измерения кажущегося ускорения и его интегрирования. При достижении программного значения скорости сигнал с ГИ ЛУ подается в систему отключения ракетного двигателя. С помощью прецизионного ГИ на неподвижном основании можно измерить значение ускорения свободного падения  $g$ , т. е. ГИ в этом случае выполняет роль гравиметра.

Кажущееся ускорение определим в соответствии с рис. 59, а (для малых углов атаки):

$$W_x = \dot{V} + g \sin \vartheta = \dot{V} + g',$$

где  $\dot{V}$  — ускорение БР;  $g' = g \sin \vartheta$  — проекция  $\bar{g}$  на продольную ось  $OX$  ракеты;  $\bar{g}$  — вектор, условно направленный вверх;  $OXYZ$  — система координат, связанная с корпусом ракеты.

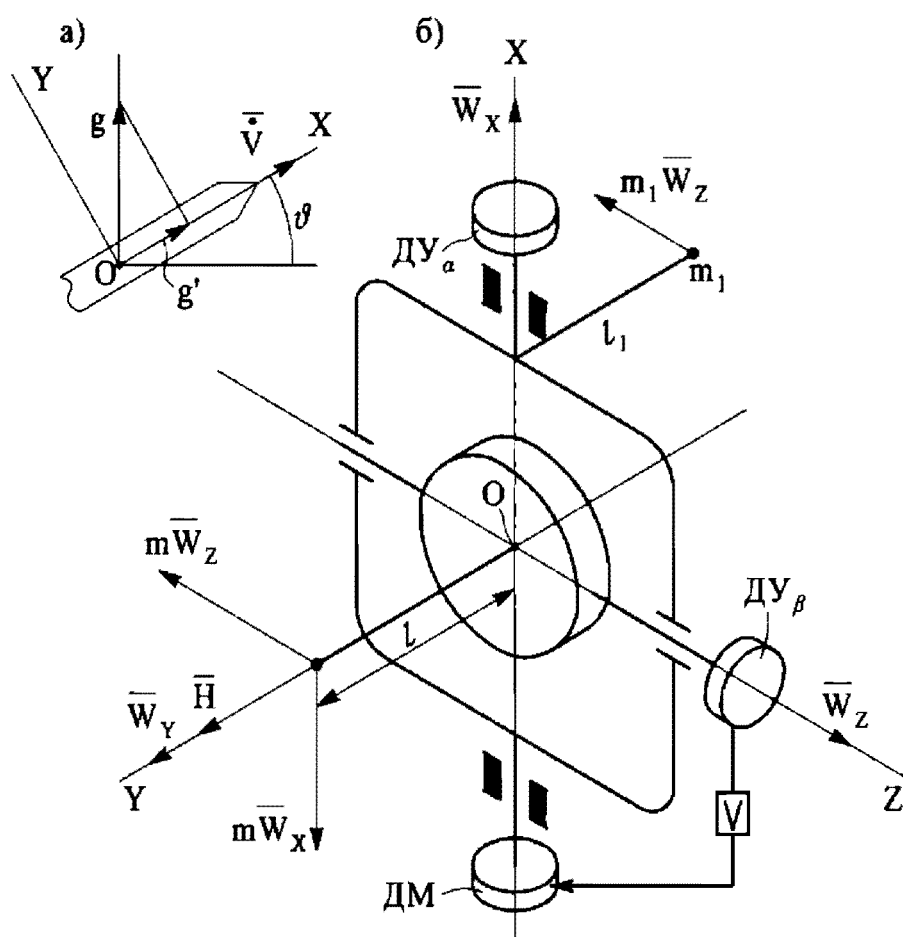


Рис. 59. Схема ГИ

Скорость ракеты

$$V = \int_0^t [W_x(t) - g'(t)] dt.$$

Рассмотрим принцип интегрирования кажущегося ускорения с помощью ГИ, представляющего собой трехстепенной гироскоп, ось наружной рамки которого параллельна продольной оси  $Ox$  ракеты, а центр масс гироскопа смещен на величину  $l$  (рис. 59, б) относительно т.  $O$  пересечения осей карданова подвеса. Для поддержания вектора  $\bar{H}$  в положении, ортогональном плоскости наружной рамки, используется система «слабой» разгрузки [2] (или межрамочной коррекции), состоящей из датчика угла  $ДУ_\beta$ , усилителя и ДМ. Характеристика системы разгрузки бывает линейной или релейной. На оси наружной рамки (выходной оси) установлен датчик команд  $ДУ_\alpha$ , сигнал с которого подается на программный механизм, счетно-решающее устройство или в бортовую ЭВМ, а далее в системы управления БР и отключения ракетного двигателя. При наличии ускорения  $W_x$  сила  $mW_x$  ( $m$  — масса гироскопа) на плече  $l$  создает момент  $mlW_x$ , вызывающий прецессию гироскопа. Считая  $\beta = 0$ , получим

$$\dot{\alpha} = \frac{mlW_x}{H} = hW_x = h(\dot{V} + g'),$$

где  $\alpha$  — угол поворота гироскопа вокруг оси наружной рамки ГИ относительно корпуса;  $h = ml/H$  — чувствительность, крутизна характеристики или передаточный коэффициент ГИ.

Угол поворота гироскопа за время  $t$

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0 = h \int_0^t \dot{V} dt + h \int_0^t g' dt = hV_k,$$

где  $\alpha_0$  — начальный угол поворота ГИ относительно корпуса;  $V_k$  — кажущаяся скорость объекта:

$$V_k = \int_0^t (V + g') dt.$$

Угол поворота гироскопа пропорционален кажущейся скорости  $V_k$  объекта. Если в программе учесть поправку, например, так, что

$$\alpha_0 = -h \int_0^t g' dt,$$

то можно считать

$$U_{\text{вых}} = K_{\text{ду}}\alpha = hK_{\text{ду}}V = h'V,$$

где  $K_{\text{ду}}$  — коэффициент крутизны выходной характеристики  $DU_\alpha$ .

Прибор является измерителем линейной скорости объекта  $V$ .

При нестабильности  $\Delta h'$  чувствительности  $h' = K_{\text{ду}}h$  погрешность измерения

$$\Delta U_{\text{вых}} = \Delta h'V + \Delta h' \left| \int_0^t g'(t) dt \right|.$$

Оценим нестабильность  $h' = K_{\text{ду}} \frac{ml}{H}$  при отклонении параметров  $\Delta m$ ,  $\Delta l$ ,  $\Delta H$ ,  $\Delta K_{\text{ду}}$ , прологарифмировав это выражение:

$$\ln h' = \ln m + \ln l + \ln K_{\text{ду}} - \ln H.$$

Продифференцируем полученное выражение:

$$\frac{dh'}{h'} = \frac{dm}{m} + \frac{dl}{l} + \frac{dK_{\text{ду}}}{K_{\text{ду}}} - \frac{dH}{H}.$$

Перейдя от дифференциала ( $d$ ) к приращению ( $\Delta$ ) и просуммировав составляющие нестабильности  $\delta h' = \Delta h'/h'$ , имеем

$$\delta h' = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta K_{\text{ду}}}{K_{\text{ду}}}.$$

Так как величины, входящие в правую часть последнего уравнения, малы и являются случайными, то можно воспользоваться среднеквадратичным значением  $\delta h'$ :

$$\delta h' = \frac{\Delta h'}{h'} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2 + \left(\frac{\Delta K_{\text{ду}}}{K_{\text{ду}}}\right)^2},$$



где  $\Delta m$  — нестабильность массы гироузла, причиной которой могут быть посторонние частицы, испарение смазки шарикоподшипников, выделение газа из материала деталей и др.;  $\Delta l$  — нестабильность положения центра масс гироузла, вызываемая деформацией деталей при действии перегрузок и изменении теплового поля прибора, износом шарикоподшипников гиромотора и т. д.;  $\Delta H$  — нестабильность кинетического момента гиромотора;  $\Delta K_{\text{ДУ}}$  — нестабильность выходной характеристики  $\text{ДУ}_\alpha$ .

Культура производства, применение прогрессивной технологии позволяют свести к минимуму влияние  $\Delta m$ . Для обеспечения  $\Delta l \rightarrow 0$  проводят тщательную конструкторскую проработку в целях подбора материалов с заданными коэффициентами линейного расширения, используют систему термостатирования прибора. В качестве гиродвигателей применяют синхронные гистерезисные двигатели или вентильные двигатели постоянного тока с высокой стабильностью частоты вращения ротора.

Чувствительность ГИ определяют на неподвижном относительно Земли основании, фиксируя число оборотов  $N$  наружной рамки за заданное время испытаний  $t_n$ . В этом случае  $\dot{\alpha} = hg$ , угол поворота за время  $t_n$   $\alpha = \dot{\alpha}t_n = 2\pi N$ , отсюда  $h = 2\pi \frac{N}{gt_n}$ .

Получим прецессионные уравнения движения ГИ. Определим проекции угловых скоростей на оси СК  $Oxyz$  при малом  $\beta$  (рис. 60):

$$\omega_x = -\dot{\beta} + \omega_z \cos \alpha - \omega_y \sin \alpha;$$

$$\omega_y = (\dot{\alpha} + \omega_x) \cos \beta - \sin \beta (\omega_y \cos \alpha + \omega_z \sin \alpha) \approx \dot{\alpha} + \omega_x.$$

Проекции ускорения на оси СК  $Oxyz$ :

$$W_x = W_z \cos \alpha - W_y \sin \alpha;$$

$$W_y = W_x \cos \beta - (W_y \cos \alpha + W_z \sin \alpha) \sin \beta \approx$$

$$\approx W_x - (W_y \cos \alpha + W_z \sin \alpha)\beta;$$

$$W_z \approx \beta W_x + W_y \cos \alpha + W_z \sin \alpha.$$

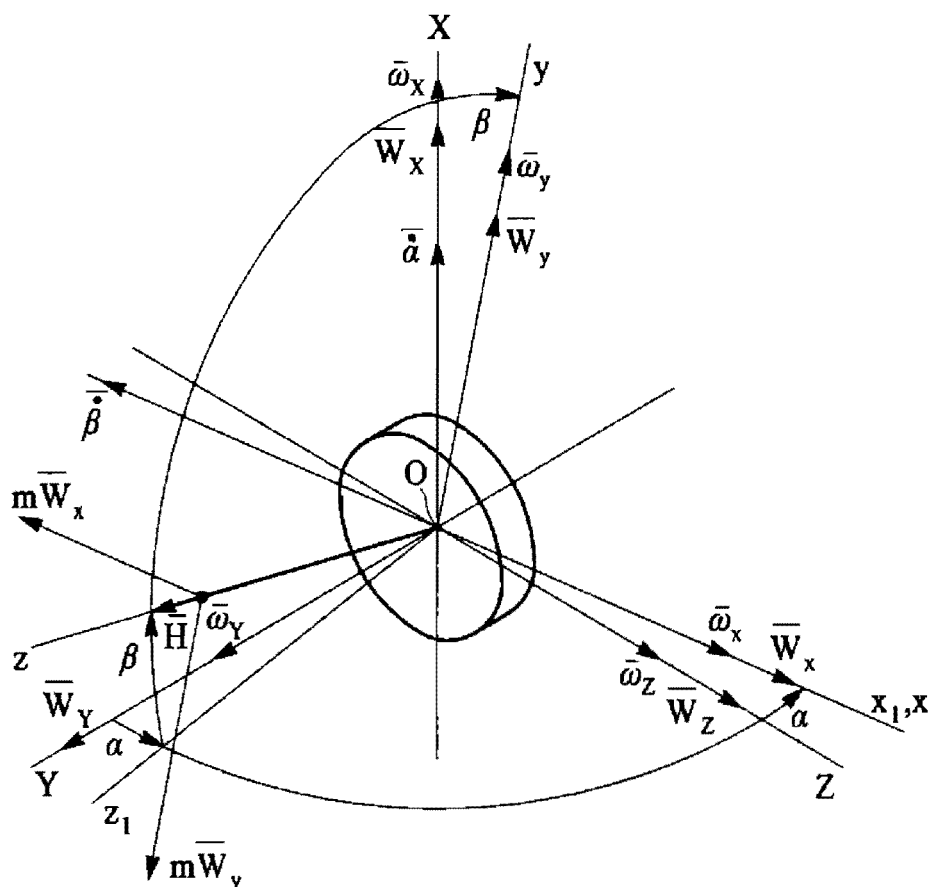


Рис. 60. К выводу прецессионных уравнений движения ГИ

Проекции моментов внешних сил:

$$M_x = ml[W_X - \beta(W_Y \cos \alpha + W_Z \sin \alpha)] + D_\beta \dot{\beta} \pm M_\beta + M_x^{\text{BP}};$$

$$M_{y1} \approx M_y \approx -ml(W_Z \cos \alpha - W_Y \sin \alpha) - D_\alpha \dot{\alpha} \mp M_\alpha + \\ + M_{y1}^{\text{BP}} - M_\kappa(\beta),$$

где  $D_\beta \dot{\beta}$ ,  $D_\alpha \dot{\alpha}$ ,  $M_\beta$ ,  $M_\alpha$  — моменты вязкого (демпфирующие моменты) и сухого трения;  $M_\kappa(\beta) = E\beta$  — момент межрамочной пропорциональной коррекции ( $E$  — удельный момент коррекции).

Прецессионные уравнения движения ГИ:

$$-H\omega_y + M_x = 0; \\ H\omega_x \cos \beta + M_{y1} = 0.$$

Раскроем полученные уравнения (при малом  $\beta$ ):

$$-H(\dot{\alpha} + \omega_x) + ml[W_X - \beta(W_Y \cos \alpha + W_Z \sin \alpha)] +$$

$$\begin{aligned}
 &+ D_{\beta} \dot{\beta} \pm M_{\beta} + M_x^{\text{BP}} = 0; \\
 &H(-\dot{\beta} + \omega_z \cos \alpha - \omega_y \sin \alpha) - E\beta - \\
 &- ml(W_z \cos \alpha - W_y \sin \alpha) - D_{\alpha} \dot{\alpha} \mp M_{\alpha} + M_{y1}^{\text{BP}} = 0.
 \end{aligned}$$

После преобразований

$$\begin{aligned}
 -H\dot{\alpha} + D_{\beta} \dot{\beta} &= -mlW_x + ml\beta(W_y \cos \alpha + W_z \sin \alpha) \mp \\
 &+ H\omega_x \mp M_{\beta} - M_x^{\text{BP}}; \\
 H\dot{\beta} + E\beta + D_{\alpha} \dot{\alpha} &= ml(W_y \sin \alpha - W_z \cos \alpha) + \\
 &+ H(\omega_z \cos \alpha - \omega_y \sin \alpha) \mp M_{\alpha} + M_{y1}^{\text{BP}}.
 \end{aligned}$$

Второе уравнение определяет угол  $\beta$ ; приведем приближенную формулу для расчета угла  $\beta$  (при малом  $\alpha$ ):

$$\beta_* = \frac{|mlW_z| + H\omega_z + |M_{\alpha}| + |M_{y1}^{\text{BP}}|}{E}.$$

Для устранения влияния  $W_z$  на наружной рамке находится груз  $m_1$ . Тогда  $(ml - m_1 l_1) W_z = 0$ , т. е.  $ml = m_1 l_1$  (см. рис. 59, б) и первое слагаемое в числителе равно нулю.

Развитие современных методов теории автоматического управления и микроэлектроники позволяет достичь условий устойчивости при больших  $E (> 10^6)$ ; в прецизионных ГК  $\beta_* \leq 5''$ .

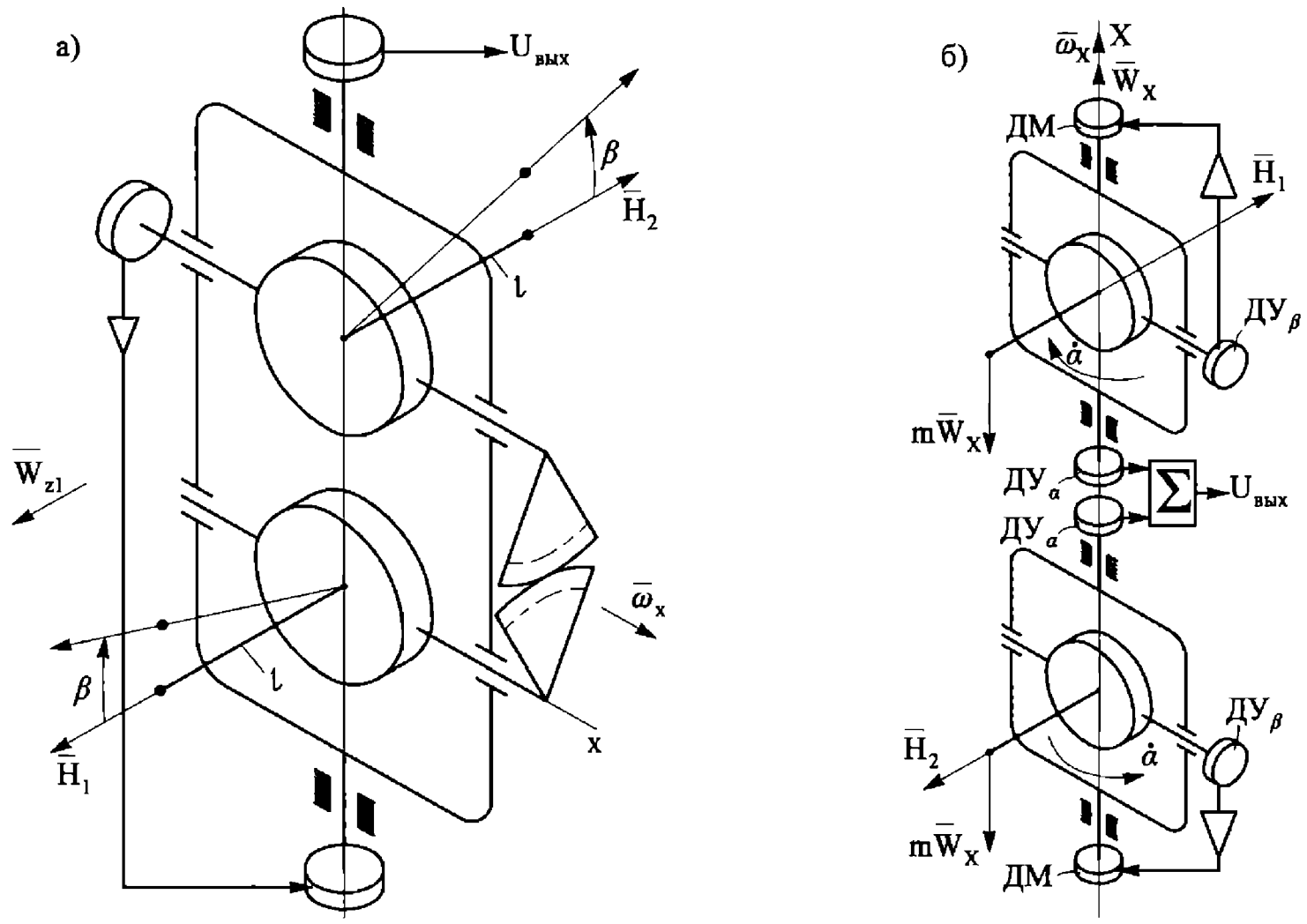
В правой части первого уравнения движения ГИ величина  $mlW_x$  — измеряемый параметр; величины  $ml\beta(W_y \cos \alpha + W_z \sin \alpha)$  и  $H\omega_x$  определяют методические погрешности, а вредные моменты  $M_{\beta}$ ,  $M_x^{\text{BP}}$  — ССП.

Два кинематически связанных гиروزла с кинетическими моментами  $|\bar{H}_1| = |\bar{H}_2|$  (рис. 61, а) и разнонаправленными векторами  $\bar{H}$  позволяют устранить влияние перекрестного ускорения  $W_{z1} = W_y \cos \alpha + W_z \sin \alpha$  при значительных  $\beta$ :  $mlW_{z1} \sin \beta - mlW_{z1} \sin \beta = 0$ .

При больших  $\omega_x$  могут применяться два ГИ (рис. 61, б), суммарный выходной сигнал с которых не зависит от  $\omega_x$ :

$$\dot{\alpha} + \omega_x + \dot{\alpha} - \omega_x = 2\dot{\alpha}.$$

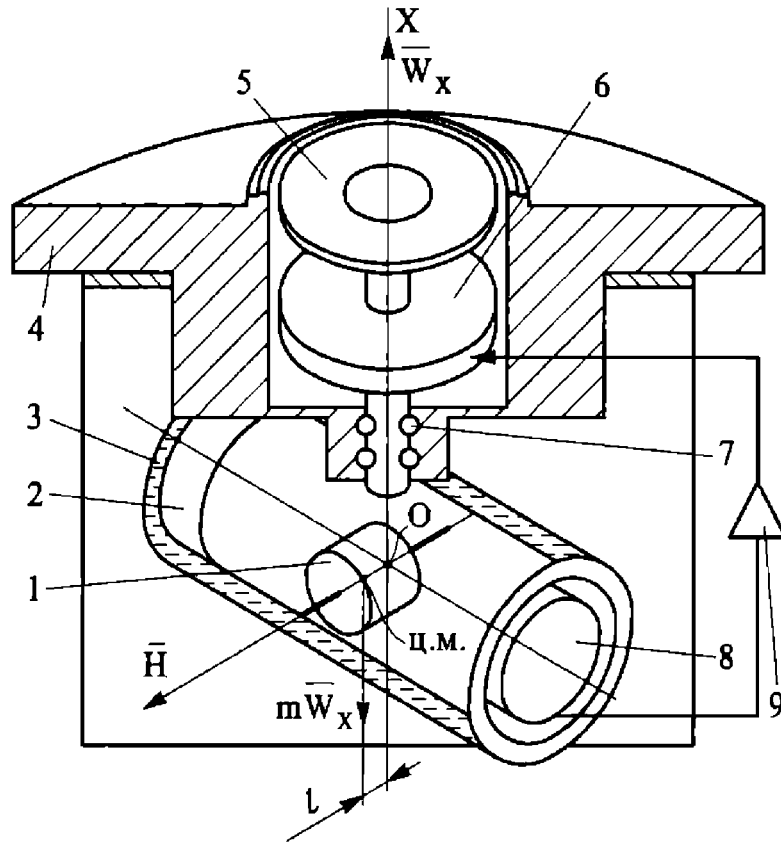
Внешние моменты  $\pm M_{\beta}$ ,  $M_x^{\text{BP}}$  уменьшают конструктивно-технологическими мероприятиями, в частности применением



**Рис. 61.** Схемы ГИ:

*a* — ГИ с кинематически связанными гиروزлами; *б* — два ГИ, сигнал с датчиков угла  $\text{ДУ}_\alpha$  которых подается на сумматор

прецизионного поплавкового гироузла, в котором поплавок подвешен на магнитном подвесе (рис. 62). С увеличением  $H$  нагрузка на опоры поплавок возрастает, поэтому величину  $H$  ограничивают:  $H = 3 \dots 5 \text{ сН} \cdot \text{см} \cdot \text{с}$  при  $ml \approx 1 \dots 3 \text{ сН} \cdot \text{см}$ . Динамика таких приборов рассчитывается с учетом нежесткости конструкции, в частности, магнитного подвеса.



**Рис. 62.** Схема поплавкового ГИ:

1 — ротор; 2 — узел ДУ и ДМ; 3 — корпус поплавкового гироузла; 4 — корпус прибора; 5, 6 — ДУ и ДМ по оси наружной рамки; 7 — радиально-упорный шарикоподшипник; 8 — поплавок; 9 — усилитель

При построении поплавкового ГИ применяют гироузел (см. рис. 62), центр масс которого смещают вдоль оси  $Oz$  на величину  $l$ . Чтобы изменение архимедовой силы в результате колебаний рабочей температуры не вызывало изменения чувствительности  $h$ , центр давления вытесненного объема жидкости совмещают с осью  $Ox$ .

Для оценки ССП можно воспользоваться моделью (41). Если преобладающим вредным моментом является момент сил

трения, то порог чувствительности ГИ по ускорению определяется очевидным соотношением

$$mlW_{x\min} \geq |M_{\dot{\beta}}|,$$

$$W_{x\min} = \frac{\omega_{\text{ССП}}}{h},$$

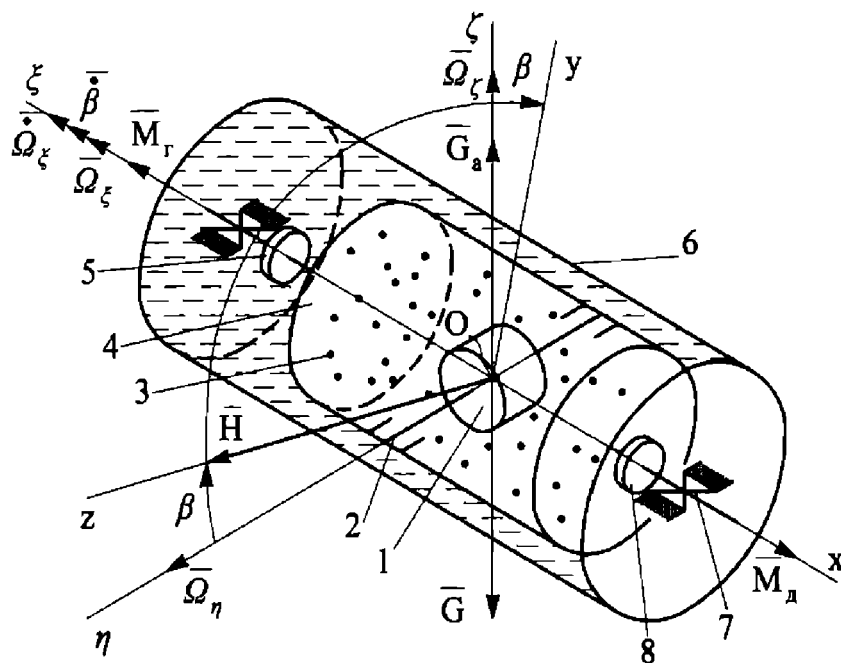
где  $\omega_{\text{ССП}} = |M_{\dot{\beta}}|/H$ .

Погрешность ГИ по скорости, вызванная ССП,  $\Delta V_{\text{ССП}} = \frac{1}{h} \int \omega_{\text{ССП}}(t) dt$ . Известны конструкции поплавковых ГИ с погрешностью  $10^{-4} \dots 10^{-5} \text{ }^\circ/\text{ч}$ , в частности для систем с плавающей гиropлатформой.

## 6. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ ГИРОСКОП

В интегрирующем гироскопе (ИГ), построенном на базе двухстепенного гироскопа, гироскопический момент, вызванный угловой скоростью основания, уравнивается демпфирующим моментом. Первые ИГ, спроектированные до 50-х годов XX в., имели пневмодемпферы, которые обладали нестабильными характеристиками по демпфированию и не позволяли создать точные приборы.

Поэтому наибольшее распространение получили поплавковые интегрирующие гироскопы (ПИГ); автором первого патента на такой гироскоп (1943 г.) является профессор Ткачев.



**Рис. 63.** Схема ПИГ:

1 — гидродвигатель (гиромотор); 2 — главные опоры гироскопа — опоры ротора; 3 — газовая среда (5 % He, 95 % H<sub>2</sub>); 4 — корпус поплавок; 5 — датчик угла; 6 — корпус прибора; 7 — опора поплавок; 8 — датчик момента

В соответствии с рис. 63 гироскопический момент  $M_r = H\Omega_z \cos\beta$  уравнивается демпфирующим моментом  $M_d = D\dot{\beta}$ ; при  $\beta \rightarrow 0$

$$D\dot{\beta} = H\Omega_z.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим (при нулевых постоянных интегрирования)

$$\beta = \frac{H}{D} \int \Omega_z(t) dt = i\psi,$$

где  $i = \frac{H}{D}$  — передаточное число ИГ;  $\psi$  — угол поворота основания (объекта).

Выходное напряжение ИГ

$$U_{\text{вых}} = K_{\text{ДУ}} i \psi = i' \psi,$$

где  $K_{\text{ДУ}}$  — крутизна выходной характеристики ДУ;  $i' = iK_{\text{ДУ}}$ .

Нестабильность передаточного отношения  $i'$  ИГ характеризуется зависимостью

$$\frac{\Delta i'}{i'} = \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta K_{\text{ДУ}}}{K_{\text{ДУ}}}.$$

Основная причина неустойчивости выходной характеристики ИГ — изменение удельного демпфирующего момента  $D$ , который во многом зависит от вязкости поддерживающей жидкости. Для поплавкового гироскопа

$$D = \frac{2\pi r^3 l}{981\delta} \mu,$$

где  $r$ ,  $l$  — радиус и длина поплавка;  $\delta \approx 0,1$  мм — зазор (см. рис. 20);  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости.

Используют «тяжелые» жидкости с плотностью  $\rho = 1,9 \dots 2,4$  г/см<sup>3</sup>. Вязкость  $\mu$  зависит от температуры; при 75...85 °С ее значение близко к постоянному. Поэтому, как правило, применяют систему термостатирования прибора, обеспечивающую стабильность поддержания температуры жидкости с точностью до 0,1...0,01 °С. Сильфон обеспечивает давление на жидкость при изменении температуры (см. рис. 20).

Поскольку сила  $G_a$  практически разгружает опоры от нагрузки  $G$ , то остаточная плавучесть  $\Delta G = G_a - G$  весьма ма-



ла. Основной нагрузкой на опору поплавкового гироузла остается гироскопический момент  $H\Omega_\xi$ . Это позволяет применять камневые опоры, виброопоры и магнитные подвесы, которые обеспечивают малые возмущающие моменты. В свою очередь это дает возможность достичь точной балансировки гироузла, которую осуществляют в два этапа — на воздухе и в жидкости. Балансировка обеспечивает положение центра масс и центра давления в т.  $O$  (на оси  $Ox$ ). В качестве гиromотора применяют синхронный гистерезисный двигатель с частотным управлением, который обеспечивает  $H = \text{const}$  (с точностью до  $10^{-4} \dots 10^{-5}$ ).

Запишем уравнение движения ПИГ (см. рис. 63), пренебрегая центробежным инерционным моментом:

$$A_0(\ddot{\beta} + \dot{\Omega}_\xi) + D\dot{\beta} - H(\Omega_\zeta \cos \beta - \Omega_\eta \sin \beta) + M_x = 0, \quad (73)$$

где  $A_0 = A + A_1$  — приведенный момент инерции поплавок с гиromотором ( $A_1$  — момент инерции поплавок относительно оси  $Ox$ );  $M_x$  — внешний момент.

После преобразований уравнения (73) получим

$$A_0\ddot{\beta} + D\dot{\beta} = H\Omega_\zeta \cos \beta - H\Omega_\eta \sin \beta - A_0\dot{\Omega}_\xi - M_x. \quad (74)$$

Методические погрешности, связанные с наличием  $\Omega_\eta$  и  $\dot{\Omega}_\xi$ , малы. Погрешность, вызванная с действием возмущающих моментов, определяется из очевидного соотношения  $H\Omega_{\zeta\text{min}} > M_x^{\text{вп}}$ . Эту погрешность определяют как собственную скорость прецессии ИГ:

$$\omega_{\text{ссп}} = \frac{M_x^{\text{вп}}}{H}.$$

Модель погрешности ИГ от перегрузки  $n$  записывается в соответствии с методикой, изложенной выше (см. выражение (41)):

$$\omega_{\text{ссп}}(n) = \omega_0 + \omega_1(g)n + \omega_2(g^2)n^2 + \dots$$

При более точных расчетах  $\omega_{\text{ссп}}(n)$  модель может быть расширена до 12 составляющих и более [2].

Найдем передаточную функцию  $W(s)$  ИГ [2], характеризующую отношения выходной величины  $\beta$  к выходной величине

не  $\Omega_z$ . Введем (в соответствии с оператором  $s$ ) обозначения  $\dot{\beta} = \beta(s)s$ ,  $\ddot{\beta} = \beta(s)s^2$ ; при этом  $H = \text{const}$ ,  $A_0 = \text{const}$ ;  $D = \text{const}$ ;  $\Omega_z(s)$ :

$$\beta(s)(A_0s^2 + Ds) = H\Omega_z(s);$$

$$\beta(s)s(Ts + 1) = i\Omega_z(s);$$

$$W(s) = \frac{\beta(s)}{\Omega_z(s)} = \frac{i}{s(Ts + 1)},$$

где  $T = \frac{A_0}{D}$  — постоянная времени ИГ (обычно  $T \leq 10^{-3}$  с).

Зная  $W(s)$ , определяют динамические погрешности ИГ [2].

При  $T = 0$  гироскоп — идеальное интегрирующее звено:

$$W(s) = \frac{i}{s}.$$

Нежесткость конструкции крепления ротора приводит к дополнительной степени свободы по углу  $\alpha$  и увеличению приведенного момента инерции и, следовательно,  $T$ . На рис. 64 нежесткость конструкции крепления ротора и гиросузда услов-

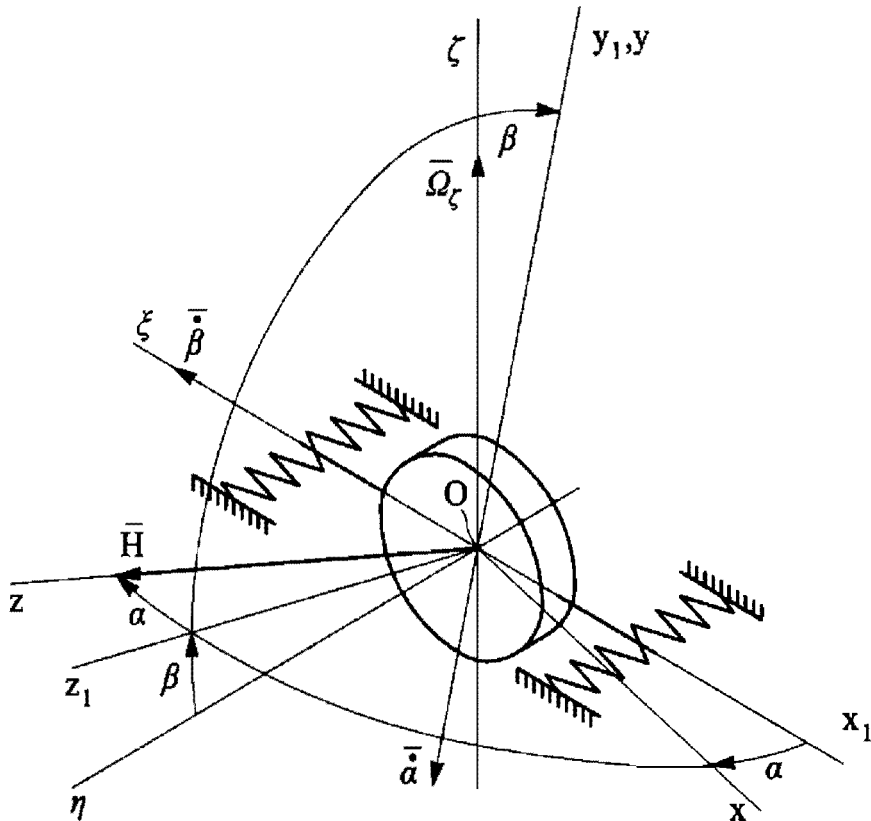


Рис. 64. К выводу уравнений движения ИГ с учетом нежесткости конструкции

но иллюстрируется упругой связью (в виде пружин) с приведенной угловой жесткостью  $K_\alpha$ . Гироскопический момент  $H\dot{\beta}$ , действующий на упругую связь (опору), вызывает отклонения по углу  $\alpha$  и уравнивается упругим моментом  $K_\alpha\alpha$ :

$$H\dot{\beta} = K_\alpha\alpha. \quad (75)$$

Уравнения движения ИГ запишем в соответствии с (74) при  $M_x = 0$ ,  $\dot{\Omega}_\xi = 0$ ,  $\Omega_\eta = 0$ ,  $\beta = 0$  и с учетом угловой скорости  $\dot{\alpha}$  (см. рис. 64):

$$A_0\ddot{\beta} + D\dot{\beta} = H(\Omega_\zeta - \dot{\alpha}). \quad (76)$$

Определив из равенства (75)  $\dot{\alpha} = \frac{H}{K_\alpha}\ddot{\beta}$ , получим

$$\left(A_0 + \frac{H^2}{K_\alpha}\right)\ddot{\beta} + D\dot{\beta} = H\Omega_\zeta.$$

Постоянная времени  $T' = \frac{A_0K_\alpha + H^2}{K_\alpha D} > T = \frac{A_0}{D}$ , возрастает, следовательно, нежесткость конструкции ведет к увеличению динамических погрешностей ИГ.

Определим нагрузку  $F$  на опоры. Гироскопический момент  $H\dot{\beta}$  уравнивается моментом реакции опор  $FL = H\dot{\beta}$ . Отсюда  $F_{\max} = \frac{H}{L}\dot{\beta} = \frac{Hi}{L}\Omega_{\xi\max}$ , где  $L$  — расстояние между опорами.

Видно, что с увеличением передаточного отношения  $i$  повышается нагрузка на опоры, поэтому для ПИГ  $i \leq 8 \dots 10$ , для ИГ космических ЛА (КЛА)  $i \leq 50 \dots 100$ .

Отметим, что расчет погрешности ИГ имеет различия в зависимости от применения ИГ в «свободном» (рис. 65, а) и «замкнутом» (рис. 65, б) режимах работы системы.

Запишем уравнение движения ИГ (74) для свободного (разомкнутого) режима в виде

$$D\dot{\beta} = H\Omega_\zeta - M_x. \quad (77)$$

Например, при действии на КЛА (см. рис. 65, а) возмущающего момента  $M_\zeta$   $\dot{\beta} = \frac{M_\zeta}{H}$ .

Определим погрешность  $\Delta\psi$  стабилизации КЛА по углу  $\psi = \Omega_\zeta t$ :

$$\Delta\psi = \omega_{\text{сспт}}t + \frac{M_\zeta}{iH}t. \quad (78)$$

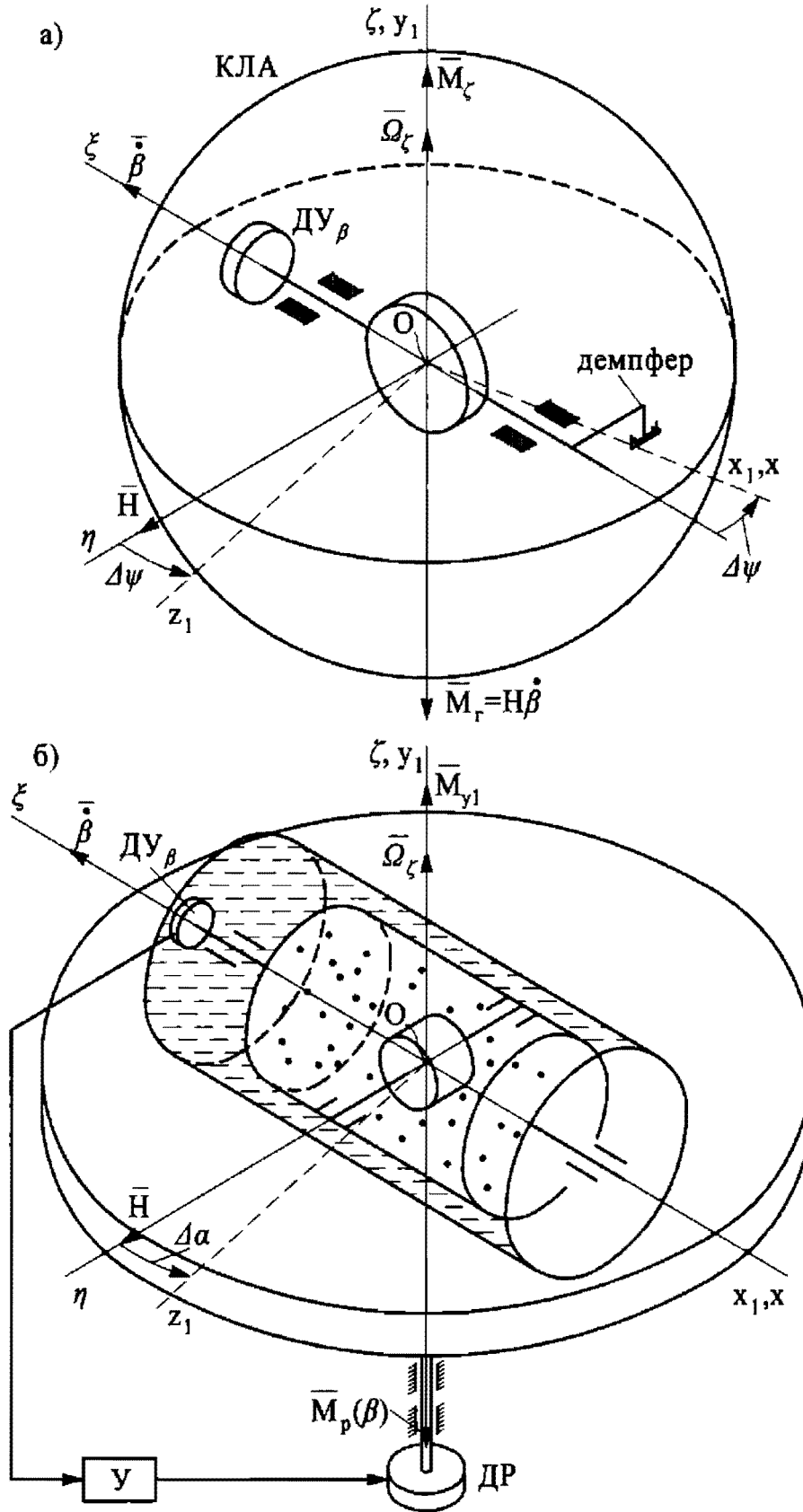
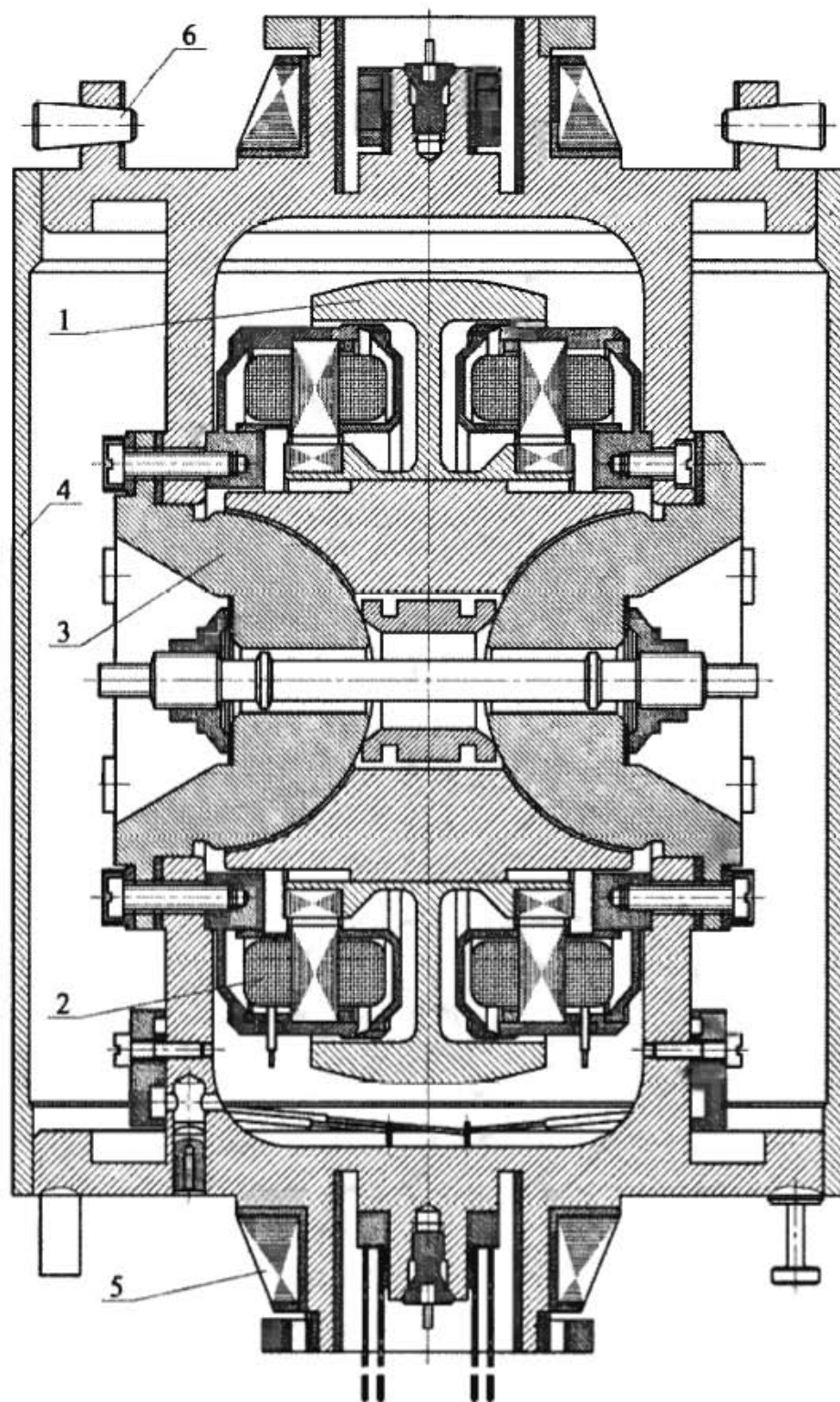


Рис. 65. Схемы работы ИГ в свободном (а) и замкнутом (б) режимах



**Рис. 66. Гироузел ПИГ:**

1, 2 — ротор и статор гиромотора; 3 — полусферическая газодинамическая опора; 4 — поплавок; 5 — ротор магнитного подвеса; 6 — балансирующий винт

Погрешность (78) имеет две составляющие, связанные с  $\omega_{\text{ССП}} = \frac{M_x}{H}$  и действием момента  $M_z$ , которые нарастают со временем. Для схемы одноосного гиросtabilизатора (см. рис. 65, б), состоящей из датчика угла ДУ, усилителя У и двигателя разгрузки ДР, в установившемся режиме, когда внешний момент  $M_{y1}$  полностью уравнивается моментом  $M_p = K_p \beta = M_{y1}$  разгрузки (здесь  $K_p$  — крутизна характеристики системы разгрузки), погрешность системы стабилизации запишем, интегрируя уравнение (77):

$$D\beta = H\Delta\alpha - M_x t,$$

откуда

$$\Delta\alpha = \omega_{\text{ССП}} t + \frac{M_{y1}}{iK_p}, \quad (79)$$

где  $\beta = \frac{M_{y1}}{K_p}$ .

При замкнутом режиме работы погрешность, связанная с действием момента  $M_{y1}$  на платформу (объект стабилизации), не зависит от времени и уменьшается с увеличением  $K_p$  (ср. с выражением (78)).

ПИГ — сложный по конструкции и дорогостоящий прибор, но именно его применение позволило разработать трехосные индикаторно-силовые гиросtabilизаторы высокой точности — до  $10^{-3} \dots 10^{-4}$  °/ч. Например, только на базе ПИГ созданы гиросистемы, позволившие обеспечить точное наведение баллистических ракет на расстояния до  $10^4$  км, высадку астронавтов на Луну, полеты дальней авиации. На рис. 66 дана одна из конструктивных схем гиросузла ПИГ с газодинамической опорой ротора гироскопа.

## 7. ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ДАТЧИКИ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ С БЫСТРОВРАЩАЮЩИМСЯ РОТОРОМ

### Датчики угловой скорости, построенные на базе двухстепенного гироскопа

Для измерения угловой скорости  $\bar{\Omega}_\zeta$  объекта ось гиросузыла двухстепенного гироскопа соединяют упругой связью с основанием (рис. 67). Вектор  $\bar{H}$  ДУС выставляют перпендикулярно к вектору  $\bar{\Omega}_\zeta$  измеряемой угловой скорости. При отклонении гироскопа на угол  $\beta$  и действии гироскопического момента  $H\Omega_\zeta \cos \beta$  возникает упругий момент  $K\beta$  ( $K$  — приведенная уг-

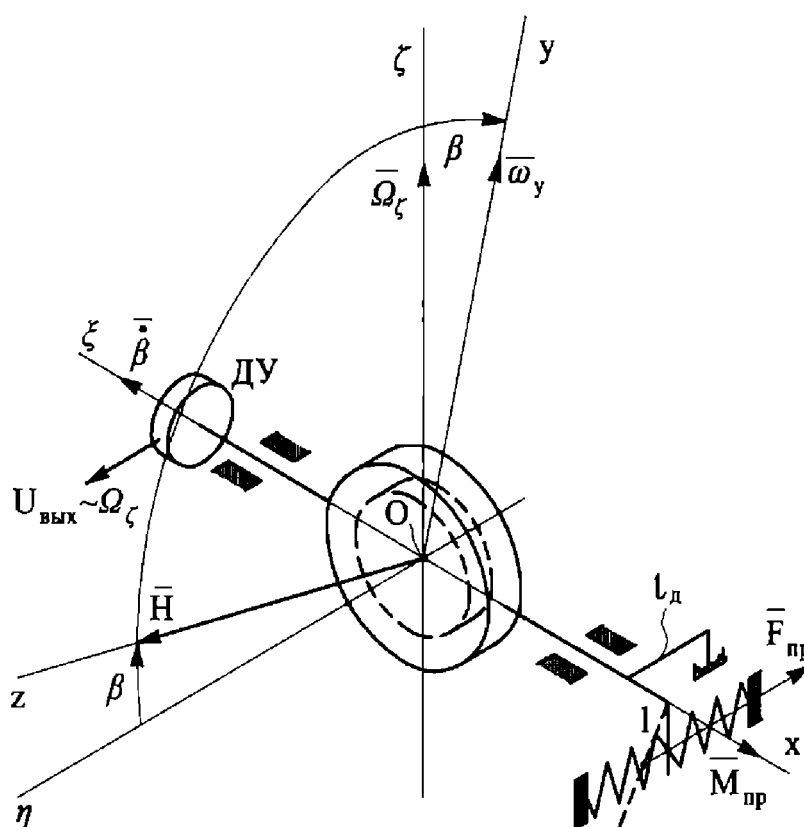


Рис. 67. Схема ДУС с механической пружиной

ловая жесткость упругой связи гиروزла с основанием). Например, для схемы на рис. 67 упругий момент  $M_{\text{пр}} = F_{\text{пр}}l = c\beta \cdot l = cl^2\beta = K\beta$ , где  $c$  — жесткость пружины;  $K = cl^2$  — приведенная жесткость.

Гироскопический момент  $M_g$  уравнивается упругим моментом  $M_{\text{пр}}$ :

$$K\beta = H\Omega_z \cos \beta.$$

При малых  $\beta$  (см. выражение (23))

$$\beta = \frac{H}{K} \Omega_z, \quad (80)$$

т. е., измеряя угол  $\beta$ , получают информацию об угловой скорости, которая снимается с ДУ:

$$U_{\text{вых}} = K_{\text{ДУ}}\beta = K_{\text{ДУ}} \frac{H}{K} \Omega_z = h\Omega_z,$$

где  $K_{\text{ДУ}}$  — крутизна характеристики ДУ по напряжению;  $h = K_{\text{ДУ}} \frac{H}{K}$  — чувствительность ДУС.

Изменение  $\Delta h$  чувствительности приводит к погрешности прибора  $\Delta h\Omega_z$ :

$$U_{\text{вых}} = (h + \Delta h)\Omega_z = h\Omega_z + \Delta h\Omega_z.$$

Определим  $\Delta h$ , прологарифмировав величину  $h$ :  $\ln h = \ln K_{\text{ДУ}} + \ln H - \ln K$ ; продифференцировав и перейдя к приращениям, получим (при суммировании погрешностей) относительное изменение чувствительности:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta K_{\text{ДУ}}}{K_{\text{ДУ}}} + \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta K}{K}.$$

Оценим приближенно относительную погрешность (в %). В качестве датчиков угла применяют потенциометрические, индукционные, индуктивные и др.; для датчика угла выберем погрешность (нестабильность характеристики)  $\frac{\Delta K_{\text{ДУ}}}{K_{\text{ДУ}}} \cdot 100 \leq 1\%$ . Наиболее часто для ДУС с механической пружиной применяют асинхронный гидродвигатель; тогда  $\frac{\Delta H}{H} \cdot 100 < 5\%$ .

Нестабильность жесткости механической пружины во многом определяется старением материала, изменением темпера-



туры окружающей среды и другими факторами и достигает значительной величины:  $\frac{\Delta K}{K} \cdot 100 \geq 10 \%$ .

Суммарная погрешность ДУС с механической пружиной существенна ( $\approx 16 \%$ ). Поэтому для прецизионных систем применяют ДУС с электропружиной, который иногда называют компенсационным ДУС, или ДУС с отрицательной обратной связью (рис. 68).

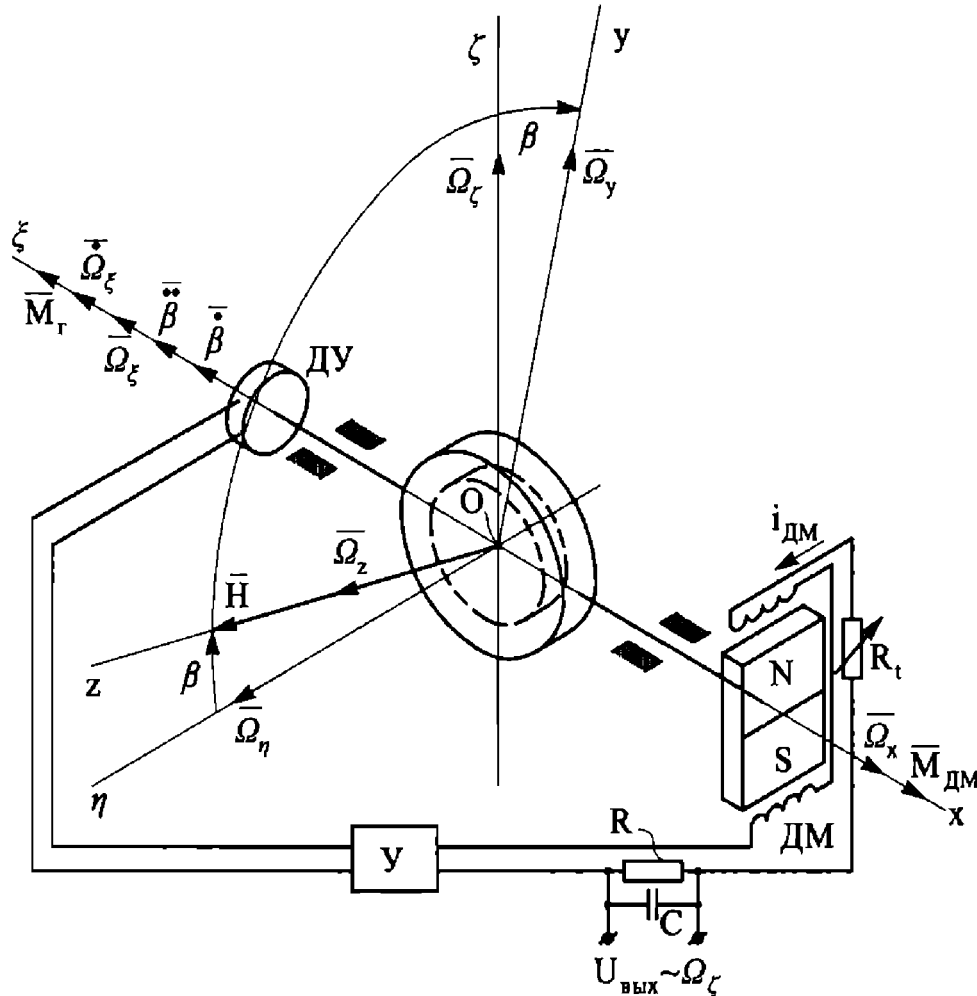


Рис. 68. Схема ДУС с электропружиной

В ДУС с электропружиной упругий момент  $K\beta$  формируется автоматической системой, включающей в себя датчик угла ДУ, усилитель У, RC-цепочку, датчик момента ДМ. При появлении угловой скорости  $\Omega_\zeta$  гироскопический момент  $H\Omega_\zeta$  поворачивает гироузел на угол  $\beta$ , фиксируемый ДУ, выходное напряжение которого  $U_{\text{ДУ}} = K_{\text{ДУ}}\beta$  подается на усилитель с коэффици-

ентом усиления  $K_{yc}$ . Выходное напряжение усилителя  $U_{yc} = K_{yc}K_{ду}\beta$  является причиной возникновения момента

$$M_{дм} = K_{дм}i_{дм} = K_{дм} \frac{U_{yc}}{R_c},$$

где  $K_{дм}$  — крутизна характеристики ДМ по току;  $i_{дм}$  — ток в обмотках ДМ;  $R_c = R + R_{дм} + R_t$  — суммарное сопротивление ( $R$  — выходное термостабильное сопротивление;  $R_{дм}$  — сопротивление обмоток ДМ;  $R_t$  — переменное сопротивление в цепи ДМ, которое обеспечивает условие  $R_{дм}(t_{окр}) + R_t(t_{окр}) = \text{const}$  при изменении температуры окружающей среды  $t_{окр}$ ).

Угол  $\beta$  увеличивается до тех пор, пока гироскопический момент  $M_g$  не уравновесится моментом  $M_{дм}$  (установившийся режим работы ДУС):

$$K_{дм}i_{дм} = H\Omega_z \cos \beta,$$

т. е. по току  $i_{дм}$  можно судить о величине и направлении  $\bar{\Omega}_z$  объекта:

$$i_{дм} \approx \frac{H}{K_{дм}} \Omega_z.$$

Выходную информацию ДУС снимают с термостабильного сопротивления  $R$ :

$$U_{вых} = Ri_{дм} = \frac{HR}{K_{дм}} \Omega_z = h\Omega_z,$$

где  $h = \frac{HR}{K_{дм}}$  — чувствительность ДУС с электропружиной.

Относительная нестабильность чувствительности

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta K_{дм}}{K_{дм}}.$$

Выберем нестабильность сопротивления  $10^{-4}$  %, для синхронного гистерезисного двигателя с частотным управлением  $\frac{\Delta H}{H} \cdot 100 \approx 10^{-4}$  %, при принятии соответствующих инженерных решений  $\frac{\Delta K_{дм}}{K_{дм}} \cdot 100 \approx 10^{-4}$  %, т. е. суммарная нестабильность равна  $3 \cdot 10^{-4}$  %. Таким образом, с помощью схемы ДУС

с электропружиной можно создать прецизионный прибор (ср. со схемой ДУС с механической пружиной).

ДУС с цифровым выходом информации строятся, как правило, на базе ДУС с электропружиной. При этом обратная связь может быть цифровой и аналоговой (см. рис. 68); в последнем случае вводят аналогово-цифровое преобразование сигнала.

Определим приведенную угловую жесткость электропружины. Момент ДМ

$$M_{\text{ДМ}} = \frac{K_{\text{ДМ}} U_{\text{ус}}}{R_c} = \frac{K_{\text{ДУ}} K_{\text{УС}} K_{\text{ДМ}}}{R_c} \beta = K \beta,$$

где  $K = \frac{K_{\text{ДУ}} K_{\text{УС}} K_{\text{ДМ}}}{R_c}$  — приведенная угловая жесткость электропружины.

Составим уравнения движения двухстепенного ДУС. Определим инерционные и внешние моменты, действующие вокруг оси  $Ox$ :

1) момент инерции гиروزла как твердого тела  $(A + A_1)(\dot{\Omega}_\xi + \ddot{\beta}) = A_0(\dot{\Omega}_\xi + \ddot{\beta})$ , где  $A$  — экваториальный момент инерции ротора;  $A_1$  — момент инерции рамки гироскопа относительно оси  $Ox$ ;  $\dot{\Omega}_\xi$  — угловое ускорение объекта относительно оси  $Ox$ ;  $A_0 = A + A_1$  — приведенный момент инерции гиروزла относительно  $Ox$ ;

2) центробежный момент инерции гиروزла  $M_{\text{ц}} = -C_0 \Omega_z \Omega_y + B_0 \Omega_y \Omega_z = -(C_0 - B_0) \Omega_y \Omega_z$ , где  $C_0 = C + C_1$ ,  $B_0 = A + B_1$  — приведенные моменты инерции гиروزла относительно осей  $Oy$  и  $Oz$  ( $B_1, C_1$  — моменты инерции рамки относительно осей  $Oy$  и  $Oz$ ;  $C$  — полярный момент инерции ротора);  $\Omega_y = \Omega_\zeta \cos \beta - \Omega_\eta \sin \beta$ ;  $\Omega_z = \Omega_\eta \cos \beta + \Omega_\zeta \sin \beta$  — проекции угловой скорости на оси  $Oy$  и  $Oz$  (см. рис. 68);

3) гироскопический момент  $M_{\text{г}} = -H \Omega_y = -H \Omega_\zeta \cos \beta + H \Omega_\eta \sin \beta$ ;

4) моменты внешних сил  $M_x = M_{\text{пр}} + M_{\text{д}} + M_x^{\text{вп}}$ , где  $M_{\text{пр}} = K \beta$  — упругий момент;  $M_{\text{д}} = D \dot{\beta}$  — демпфирующий момент;  $M_x^{\text{вп}}$  — вредный момент (момент сил трения в опорах

гироузла, момент разбалансировки, момент магнитной природы, момент токоподводов и т. д.).

Уравнение движения ДУС

$$A_0(\ddot{\beta} + \dot{\Omega}_\xi) - (C_0 - B_0)\Omega_y\Omega_z - H\Omega_z \cos \beta + H\Omega_\eta \sin \beta + D\dot{\beta} + K\beta + M_x^{\text{BP}} = 0.$$

Пренебрегая центробежным моментом инерции, получим

$$A\ddot{\beta} + D\dot{\beta} + K\beta = H\Omega_z \cos \beta - H\Omega_\eta \sin \beta - A_0\dot{\Omega}_\xi - M_x^{\text{BP}}. \quad (81)$$

Статическое решение уравнения (при  $\Omega_\eta = 0$ ,  $\dot{\Omega}_\xi = 0$ ,  $M_x^{\text{BP}} = 0$ ) и малых  $\beta$ :  $\beta = \frac{H}{K}\Omega_z \cos \beta \approx \frac{H}{K}\Omega_z$ , что совпадает с выражением (80).

Перекрестная угловая скорость  $\Omega_\eta$  является причиной погрешности ДУС:

$$\beta \approx \frac{H}{K + H\Omega_\eta}\Omega_z \approx \frac{H}{K}\Omega_z - \frac{H^2\Omega_\eta\Omega_z}{K(K + H\Omega_\eta)}.$$

Погрешность измерения, вызванная  $\Omega_\eta$ , исчезает при  $\beta \rightarrow 0$  или при применении кинематически связанных (с передаточным отношением  $i = 1$ ) двух гироскопов с разнонаправленными кинетическими моментами  $H_1 = H_2 = H$  [2].

Погрешность  $\frac{A_0\dot{\Omega}_\xi}{K}$ , вызванная ускорением  $\dot{\Omega}_\xi$ , обычно мала. Если имеется информация об угловом ускорении  $\dot{\Omega}_\xi$  (например, при наличии ДУС), то возможна компенсация этой погрешности при обработке информации ДУС.

В случае действия вредных моментов измерение  $\Omega_z$  может быть осуществлено при очевидном условии:  $H\Omega_{z\text{min}} \cos \beta > M_x^{\text{BP}}$ .

Величину  $\Omega_{z\text{min}}$  называют порогом чувствительности ДУС; при малых  $\beta$

$$\Omega_{z\text{min}} = M_x^{\text{BP}}/H. \quad (82)$$

Равенство (82) имеет вид формулы ССП гироскопа. Если в качестве опор гироузла используют прецизионные шарикоподшипники, то вредные моменты определяются в основном

моментами сил трения, разбалансировки, токоподводов. Тогда модель погрешности ДУС при действии линейных перегрузок можно определить формулой (41). Для таких ДУС обычно  $\omega_0 = 0,5 \dots 5,0$  °/ч. В целях уменьшения моментов сил трения применяют поплавковые двухстепенные гирисконны (см. рис. 20). В этих приборах архимедова сила разгружает опоры гироузла, в качестве которых применяют камневые или виброопоры, магнитные подвесы. Основной нагрузкой на опоры поплавкового гирисконна являются гирисконический момент  $H\Omega_\xi$  и остаточная плавучесть  $\Delta G = G - G_a$ , которые составляют малую величину. Это позволяет добиться высокой точности для поплавковых гирисконнов (до  $10^{-1} \dots 10^{-3}$  °/ч). Зазор  $\delta \approx 1$  мм, что на порядок больше значения  $\delta$  ПИГ.

Выше рассмотрены так называемые статические погрешности; при этом погрешности, вызванные  $\Omega_\zeta$  и  $\dot{\Omega}_\xi$ , относят к методическим, а погрешности, которые связаны с нестабильностью чувствительности, вредными моментами, — к инструментальным, подчеркивая их зависимость от конструкции и технологии изготовления гироприбора.

Определим динамические погрешности ДУС, анализируя уравнение  $A_0\ddot{\beta} + D\dot{\beta} + K\beta = H\Omega_\zeta$ , которое приведем к стандартному виду:

$$\ddot{\beta} + 2\xi\omega_0\dot{\beta} + \omega_0^2\beta = \frac{H}{A_0}\Omega_\zeta, \quad (83)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{K/A_0}$  — собственная частота незатухающих колебаний;  $\xi = \frac{D}{2A_0\omega_0}$  — относительная степень затухания.

Пусть  $\Omega_\zeta = \Omega_{\zeta a} \sin \omega t$ , где  $\Omega_{\zeta a}$ ,  $\omega$  — амплитуда и частота изменения угловой скорости соответственно. Решение уравнения (83) имеет вид

$$\beta = \lambda \frac{H}{K} \sin(\omega t - \varphi),$$

где  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 - 4\xi^2\omega^2/\omega_0^2}}$  — коэффициент динамичности;

$\varphi = \arctg \frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$  — сдвиг по фазе.

Динамическая погрешность  $\Delta_{\text{дин}} = \lambda - 1$  и сдвиг по фазе малы (рис. 69), если выполняется условие  $\omega_0 \approx (8 \dots 10)\omega_{\text{max}}$ , где  $\omega_{\text{max}}$  — максимальная частота изменения измеряемой угловой скорости объекта.

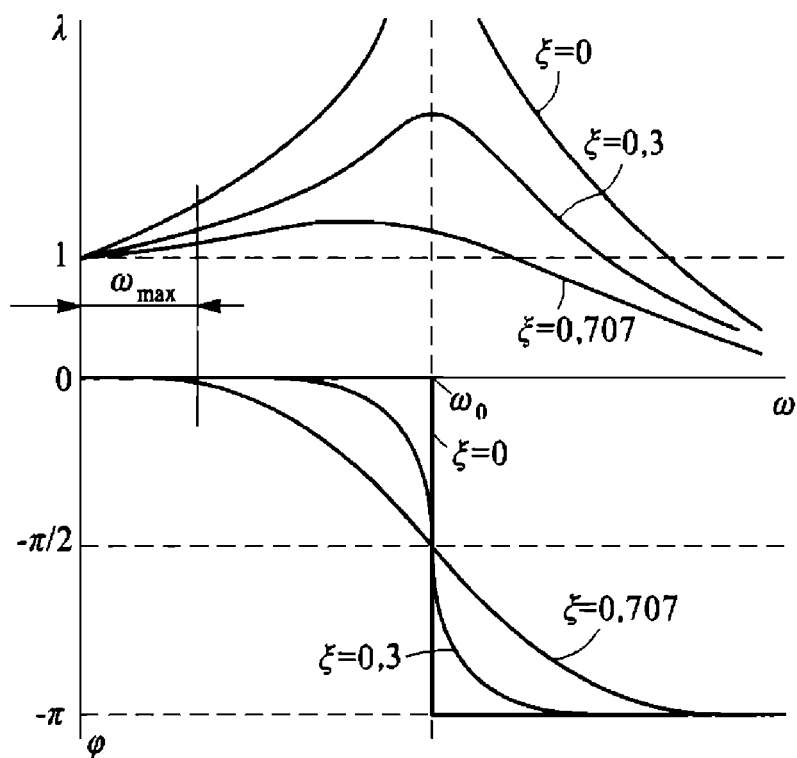


Рис. 69. Амплитудно-фазовые характеристики

Переходный процесс ДУС (при единичном возмущении) является колебательным при  $\xi < 0,707$ , оптимальным — при  $\xi = 0,707$ , аperiodическим — при  $\xi > 0,707$  (рис. 70).

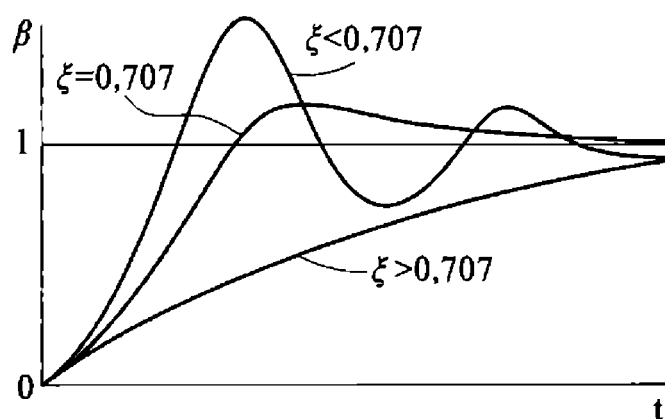


Рис. 70. График переходного процесса ДУС

На динамику ДУС заметно влияет нежесткость конструкции крепления ротора. Воспользуемся упрощенной конструктивной схемой крепления гироузла (см. рис. 64). Упругая связь с приведенной угловой жесткостью  $K_\alpha$  обуславливает дополнительную степень свободы. Уравнение движения ротора вокруг оси  $Oy$  при малых  $\alpha$  и  $\beta$

$$B_0\ddot{\alpha} + D_\alpha\dot{\alpha} + K_\alpha\alpha = H\dot{\beta}, \quad (84)$$

где  $B_0$  — приведенный момент инерции гироузла относительно оси  $Oy$ ;  $D_\alpha$  — удельный демпфирующий момент относительно оси  $Oy$ .

Считая, что вокруг оси  $Oy$  колебания быстро затухают, запишем уравнение (84) в виде

$$K_\alpha\alpha = H\dot{\beta}; \quad (85)$$

гироскопический момент при этом уравновешивается упругим моментом.

Уравнение движения относительно оси  $Ox$

$$A_0\ddot{\beta} + D\dot{\beta} + K\beta = H(\Omega_z - \dot{\alpha}). \quad (86)$$

Подставив  $\dot{\alpha} = \frac{H}{K_\alpha}\ddot{\beta}$  в выражение (86), получим

$$\left(A_0 + \frac{H^2}{K_\alpha}\right)\ddot{\beta} + D\dot{\beta} + K\beta = H\Omega_z.$$

Собственная частота  $\omega'_0 = \sqrt{\frac{K}{A_0 + H^2/K_\alpha}}$  ДУС с нежесткой конструкцией меньше  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{A_0}}$ , следовательно, возрастают погрешности  $\Delta_{\text{дин}}$  и  $\varphi$ . Как правило,  $\omega'_0 \approx (0,85 \dots 0,90)\omega_0$ .

Оценим динамическую погрешность ДУС при использовании в БИНС. Выходной сигнал ДУС  $U_{\text{вых}} = h\Omega_z$  интегрируется:

$$U_{\text{и}} = K_{\text{и}} \int_0^t U_{\text{вых}}(t) dt = K_{\text{и}} h \psi,$$

где  $\psi = \int_0^t \Omega_z(t) dt$ .

Передаточную функцию ДУС  $W(s) = U_{\text{вых}}(s)/\Omega_z(s)$  можно определить из уравнения  $\ddot{\beta} + 2\xi\omega_0\dot{\beta} + \omega_0^2\beta = \frac{H}{A_0}\Omega_z$ .

После преобразований

$$K_{\text{ДУ}}\beta(s)(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2) = \frac{H}{A_0} \Omega_z(s) K_{\text{ДУ}};$$

$$U_{\text{ВЫХ}}(s) \left( \frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} s + 1 \right) = h \Omega_z(s).$$

Тогда

$$W(s) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(s)}{\Omega_z(s)} = \frac{h}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}}; \quad U_{\text{ВЫХ}}(s) = W(s) \Omega_z(s).$$

При идеальном интегрировании  $U_1(s) = K_{\text{И}} h \Omega_z(s) s^{-1} = K_{\text{И}} h \psi_1(s)$ .

С учетом  $W(s)$  («реальный» сигнал):  $U_2(s) = K_{\text{И}} W(s) \Omega_z(s) s^{-1} = K_{\text{И}} h \psi_2(s)$ .

Погрешность измерения по углу

$$\begin{aligned} \Delta\psi(s) &= \psi_1(s) - \psi_2(s) = \frac{U_1(s) - U_2(s)}{K_{\text{И}} h} = \\ &= \Omega_z(s) \frac{\frac{2\xi}{\omega_0} + \frac{s}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}}. \end{aligned}$$

Полагая  $\Omega_z$  медленно изменяющимся (по сравнению с периодом собственных колебаний  $T = 2\pi/\omega_0$ ), получим погрешность измерения угла  $\Delta\psi(t) = \frac{2\xi}{\omega_0} \Omega_z(t)$ , которая зависит от измеряемой угловой скорости  $\Omega_z$  объекта. При уменьшении  $\omega_0$  погрешность измерения возрастает.

### **Трехстепенной датчик угловой скорости, построенный на базе астатического гироскопа**

ДУС, построенный на базе трехстепенного гироскопа (рис. 71), применяется в головках самонаведения, системах прицеливания и т. п. В таком приборе трехстепенной гироскоп имеет две системы «перекрестной» обратной связи по моменту,



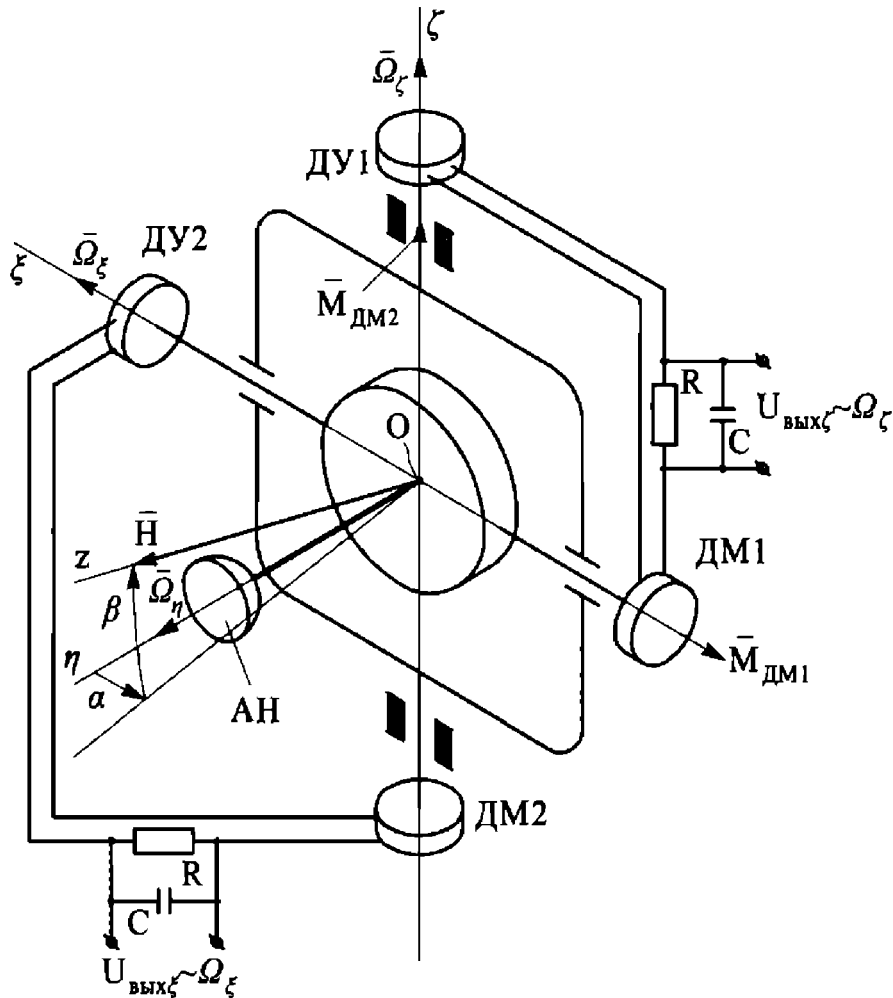


Рис. 71. Схема ДУС с тремя степенями свободы:  
АН — антенна наведения

состоящие из датчиков угла (ДУ1, ДУ2), усилителей, RC-цепочек, датчиков момента (ДМ1, ДМ2). Устройство слежения за целью крепится на гиروزле: это оптические или тепловизионные устройства, радиоантенны. При появлении угловой скорости  $\Omega_z$  сигнал с ДУ1 поступает на ДМ1, который развивает момент  $M_{ДМ1} = K\alpha$ , вызывающий прецессию гироскопа  $\dot{\alpha} = \frac{K}{H}\alpha$ . Очевидно, что угловая скорость прецессии нарастает до тех пор, пока не сравняется с  $\Omega_z$ :

$$\frac{K}{H}\alpha_* = \Omega_z, \quad \alpha_* = \frac{H\Omega_z}{K},$$

т. е. установившееся значение угла  $\alpha_*$  пропорционально угловой скорости объекта  $\Omega_z$  по каналу оси  $Oz$ . Момент датчика за-

висит от тока  $i_{\text{ДМ}}$ :  $M_{\text{ДМ1}} = K_{\text{ДМ}} i_{\text{ДМ}} = K \alpha_* = H \Omega_z$ , т. е. момент ДМ1 уравнивает гироскопический момент  $H \Omega_z$ :

$$i_{\text{ДМ}} = \frac{H}{K_{\text{ДМ}}} \Omega_z.$$

Выходной сигнал снимается с термостабильного сопротивления  $R$ :

$$U_{\text{вых}\zeta} = R \frac{H}{K_{\text{ДМ}}} \Omega_z = h \Omega_z,$$

где  $h = \frac{RH}{K_{\text{ДМ}}}$  — чувствительность ДУС.

Аналогично по каналу оси  $O\xi$   $U_{\text{вых}\xi} = h \Omega_\xi$ . Нестабильность чувствительности  $\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta K_{\text{ДМ}}}{K_{\text{ДМ}}}$  во многом определяет точность прибора.

Составим прецессионные уравнения движения ДУС. Для этого определим проекции абсолютной угловой скорости на оси Резаля  $Oxyz$  (рис. 72):

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\dot{\beta} - \Omega_\xi \cos \alpha - \Omega_\eta \sin \alpha; \\ \omega_y &= (\dot{\alpha} + \Omega_z) \cos \beta - \sin \beta (\Omega_\eta \cos \alpha - \Omega_\xi \sin \alpha); \\ \omega_z &\ll \Omega. \end{aligned}$$

Прецессионные уравнения ДУС ( $H = \text{const}$ ):

$$\begin{aligned} -H \omega_y + K \alpha + M_x &= 0; \\ H \omega_x + \frac{K \beta + M_{y1}}{\cos \beta} &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим  $\omega_{\text{ССП}} = \frac{M_x}{H}$ ,  $\omega'_{\text{ССП}} = \frac{M_y}{H}$ ,  $\frac{K}{H} = \varepsilon$ . Тогда

$$\dot{\alpha} \cos \beta + \Omega_z \cos \beta - \sin \beta (\Omega_\eta \cos \alpha - \Omega_\xi \sin \alpha) - \varepsilon \alpha - \omega_{\text{ССП}} = 0;$$

$$\cos \beta (\dot{\beta} + \Omega_\xi \cos \alpha + \Omega_\eta \sin \alpha) - \varepsilon \beta - \omega'_{\text{ССП}} \approx 0.$$

Для малых  $\alpha$  и  $\beta$  получим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} - \varepsilon \alpha &= -\Omega_z + \beta \Omega_\eta + \omega_{\text{ССП}}; \\ \dot{\beta} - \varepsilon \beta &= -\Omega_\xi - \alpha \Omega_\eta + \omega'_{\text{ССП}}. \end{aligned} \tag{87}$$

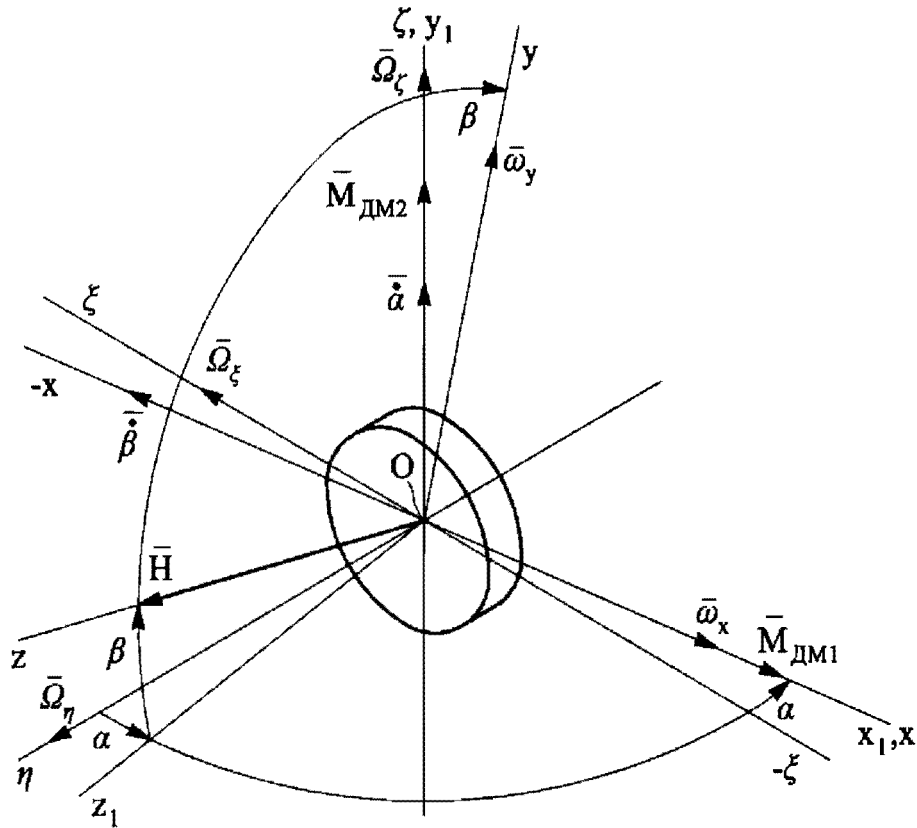


Рис. 72. К выводу уравнений движения ДУС с тремя степенями свободы

Составляющие  $\beta\Omega_\eta$ ,  $\alpha\Omega_\eta$  определяют погрешность прибора, обусловленную перекрестной угловой скоростью  $\Omega_\eta$ , поэтому необходимо обеспечить работу ДУС при малых  $\alpha$  и  $\beta$ .

Погрешности, вызванные ССП, уменьшаются при малых  $M_x$ ,  $M_{y1}$  и увеличении  $\epsilon$ , значение которого выбирают из условий устойчивости системы. При отсутствии погрешности (87)  $\alpha = \frac{\Omega_z}{\epsilon}$ ,  $\beta = \frac{\Omega_\xi}{\epsilon}$ . Часто такой двухкомпонентный ДУС выполняют на базе трехстепенного гироскопа с внутренним кардановым подвесом.

Для БИНС применяют динамически настраиваемые гироскопы (ДНГ), работающие в режиме трехстепенного ДУС с внутренним кардановым подвесом.

### Роторный вибрационный гироскоп

Двухстепенной роторный вибрационный гироскоп (РВГ) — один из первых вибрационных гироскопов, нашедших промышленное применение (рис. 73). Основные элементы РВГ: ротор 1, торсионы 2, датчики угла 5 и 8, вал 6, двигатель 7, датчики момента 3 и 4. РВГ может работать в двух режимах: 1) дорезонансном при  $\omega_0 \ll \dot{\varphi}_0$ , где  $\omega_0$  — собственная частота незатухающих колебаний ротора;  $\dot{\varphi}_0$  — угловая скорость (час-

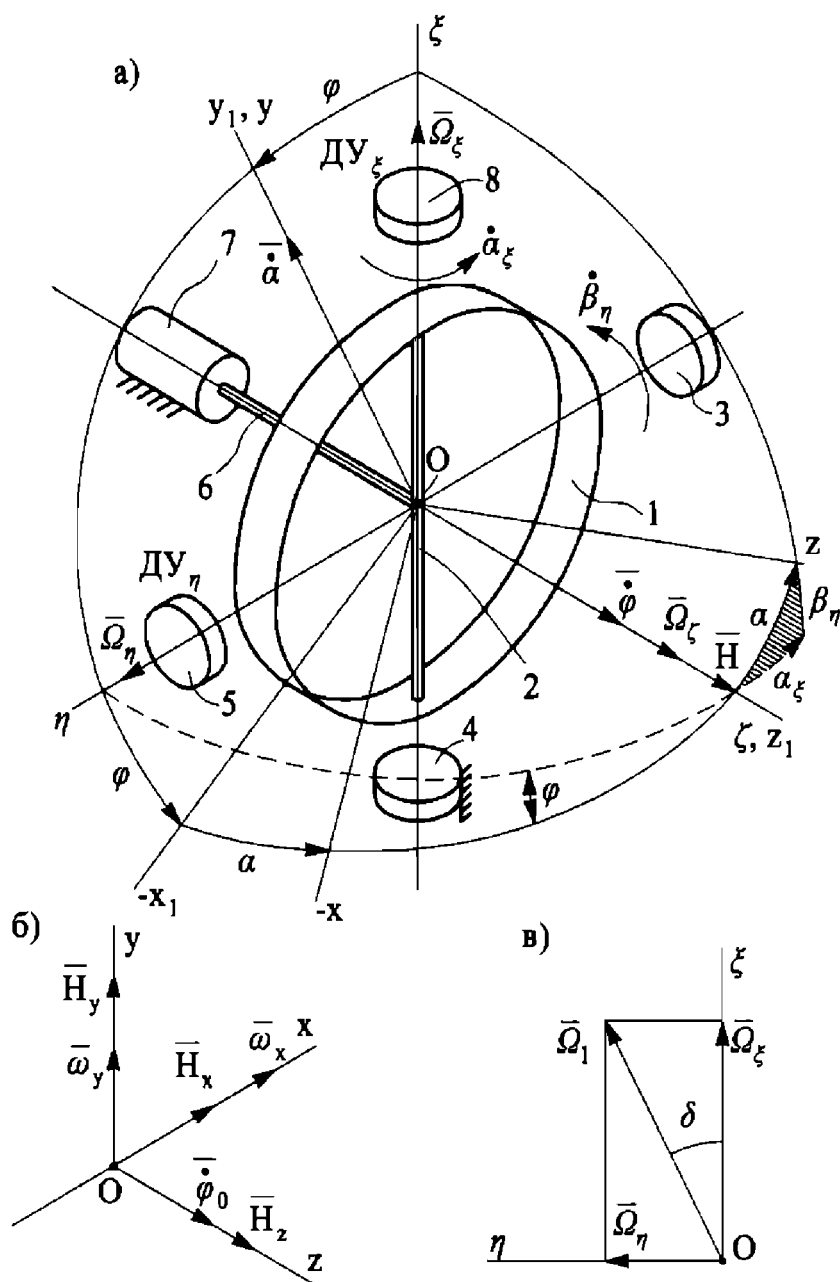


Рис. 73. Схема РВГ

тота вращения) ротора; 2) резонансом при  $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$ , измеряя составляющие угловой скорости объекта  $\Omega_\xi$  и  $\Omega_\eta$ . При первом режиме постоянные составляющие сигнала с ДУ $_\eta$  и ДУ $_\xi$  пропорциональны  $\Omega_\xi$  и  $\Omega_\eta$ , при втором постоянные составляющие сигнала с ДУ $_\eta$  и ДУ $_\xi$  пропорциональны  $\Omega_\eta$  и  $\Omega_\xi$ .

Принцип измерения угловой скорости заключается в том, что гироскопический момент уравнивается упругим моментом торсионов (за целый оборот ротора), к которому добавляется центробежный момент инерции ротора. Составим уравнение движения РВГ, руководствуясь правилом гироскопического момента (с методической целью). Выберем СК:  $O\xi\eta\zeta$  связана с корпусом прибора (объектом),  $Ox_1y_1z$  — с валом,  $Oxyz$  — с ротором (рис. 73, а).

Примем основные допущения:  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \text{const}$ ; угол  $\alpha$  — мал;  $H_z = C\dot{\varphi}_0$  — кинетический момент гироскопа;  $C$  — осевой момент инерции ротора. Составим уравнение движения ротора вокруг оси торсионов  $Oy$ , учитывая момент инерции  $B\dot{\omega}_y$  ротора ( $B$  — момент инерции ротора относительно  $Oy$ ), гироскопический момент  $H_z\omega_x - H_x\omega_z$  (рис. 73, б), внешний момент  $M_y = -K\alpha - D\dot{\alpha} + M_{\text{упр}}$  ( $K$  — угловая жесткость торсионов;  $D$  — удельный демпфирующий момент). Момент  $M_y$  содержит вредные моменты  $M^{\text{BP}}$  и управляющие моменты  $M_{\text{упр}}$  при наличии обратной связи (в этом случае РВГ должен иметь датчики момента по осям  $O\xi$  и  $O\eta$ ). Суммируем моменты:

$$-B\dot{\omega}_y + H_z\omega_x - H_x\omega_z - K\alpha - D\dot{\alpha} + M_y = 0, \quad (88)$$

где  $\omega_y = \dot{\alpha} + \Omega_\xi \cos \varphi + \Omega_\eta \sin \varphi$ ;

$$\dot{\omega}_y = \ddot{\alpha} - \dot{\varphi}(\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi) + \dot{\Omega}_\xi \cos \varphi + \dot{\Omega}_\eta \sin \varphi;$$

$$\omega_x \approx \Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi - \dot{\varphi}_0 \alpha;$$

$H_x = A\omega_x$  ( $A$  — момент инерции ротора относительно оси  $Ox$ ).

Раскроем уравнение (88) при  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ ,  $M_y = M_y^{\text{BP}}$ :

$$B\ddot{\alpha} + D\dot{\alpha} + [K + (C - A)\dot{\varphi}_0^2]\alpha = (C + B - A)\dot{\varphi}_0(\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi) - B(\dot{\Omega}_\xi \cos \varphi + \dot{\Omega}_\eta \sin \varphi) + M_y^{\text{BP}}. \quad (89)$$

В уравнение (89) входят квазиупругий момент  $(C - A)\dot{\varphi}_0^2\alpha$ , обусловленный центробежным моментом инерции ротора,

суммарная угловая жесткость  $K_\alpha = K + (C - A) \dot{\varphi}_0^2$  и кинетический момент гироскопа  $H = (C + B - A) \dot{\varphi}_0$ .

При  $M_y^{BP} = 0$ ,  $\Omega_\xi = \text{const}$ ,  $\Omega_\eta = \text{const}$  уравнение (89) имеет вид

$$B\ddot{\alpha} + D\dot{\alpha} + K_\alpha\alpha = H(\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi). \quad (90)$$

Статическое решение уравнения (соответствует дорезонансному решению):

$$\alpha^* = \frac{H}{K_\alpha} (\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi), \quad (91)$$

т. е. РВГ измеряет проекции угловой скорости объекта по двум осям —  $O\xi$  и  $O\eta$  (двухкомпонентный ДУС).

Измерение угла  $\alpha$  в подвижной системе координат нецелесообразно, так как конструкция ДУ может быть сложна и потребует применения токоподводов с неподвижной части прибора на вращающийся вал. Поэтому ведется измерение углов  $\alpha_\xi$ ,  $\beta_\eta$  в СК  $O\xi\eta\zeta$ ; зависимости  $\alpha_\xi(\alpha)$ ,  $\beta_\eta(\alpha)$  находим из сферического треугольника на рис. 73,  $\alpha$ :  $\alpha_\xi = \alpha \cos \varphi$ ;  $\beta_\eta = \alpha \sin \varphi$ . Тогда

$$\alpha_\xi = -\frac{H}{2K_\alpha} (\Omega_\eta + \Omega_\eta \cos 2\dot{\varphi}_0 t - \Omega_\xi \sin 2\dot{\varphi}_0 t).$$

Постоянная составляющая сигнала  $DU_\xi$   $U_{\text{вых}\xi} = -h\Omega_\eta$ , где  $h = \frac{K_{DU}H}{2K_\alpha}$  — чувствительность РВГ.

Аналогично

$$\beta_\eta = \frac{H}{2K_\alpha} (\Omega_\xi - \Omega_\xi \cos 2\dot{\varphi}_0 t - \Omega_\eta \sin 2\dot{\varphi}_0 t).$$

Постоянная составляющая сигнала  $DU_\eta$   $U_{\text{вых}\eta} = h\Omega_\xi$ .

Ротор совершает колебания с частотой  $2\dot{\varphi}_0$  около положения равновесия, определяемого угловыми скоростями  $\Omega_\xi$  и  $\Omega_\eta$ ; это характерно для виброгироскопов.

Преобразуем уравнение (90) к стандартному виду:

$$\ddot{\alpha} + 2\xi\omega_0\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = \frac{H}{B}\Omega_1 \sin(\dot{\varphi}_0 t - \delta). \quad (92)$$

Здесь  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_\alpha}{B}}$  — собственная частота РВГ;  $\xi = \frac{D}{2\omega_0 B}$  — отно-

сительная степень затухания;  $\Omega_1 = \sqrt{\Omega_\xi^2 + \Omega_\eta^2}$ , где  $\Omega_\xi = \Omega_1 \cos \delta$ ;  $\Omega_\eta = \Omega_1 \sin \delta$ ; при этом  $\operatorname{tg} \delta = \frac{\Omega_\eta}{\Omega_\xi}$  (см. рис. 73, б).

Общее решение уравнения (92)

$$\alpha = \lambda \frac{H}{B\omega_0^2} \Omega_1 \sin(\dot{\varphi}_0 t - \delta - \chi), \quad (93)$$

где  $\lambda$  — коэффициент динамичности;  $\chi$  — сдвиг по фазе.

Для дорезонансного режима при  $\dot{\varphi}_0 \ll \omega_0$   $\lambda \approx 1$ ,  $\chi \approx 0$  и решение (93) совпадает с выражением (91).

Для резонансной настройки при  $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$ ,  $\lambda = \frac{1}{2\xi}$ ,  $\chi = \frac{\pi}{2}$  с учетом  $H = C\Omega$

$$\alpha = -\frac{C}{D} \Omega_1 \cos(\dot{\varphi}_0 t - \delta).$$

Постоянные составляющие сигналов с  $ДУ_\xi$  и  $ДУ_\eta$  соответственно:

$$U_{\text{вых}\xi} = -h_p \Omega_\xi; \quad U_{\text{вых}\eta} = -h_p \Omega_\eta,$$

где  $h_p = \frac{K_{ДУ}C}{2D}$  — чувствительность РВГ при резонансной настройке.

При резонансной настройке  $h_p \gg h$ , однако трудность обеспечения стабильности демпфирования позволяет применять РВГ при  $\omega_0 = \dot{\varphi}_0$  только в качестве ЧЭ гиростабилизированных платформ.

Рассмотрим методику определения модели погрешности РВГ для следующих условий:  $\Omega_\eta^0 = \text{const}$  — измеряемая величина; угловая вибрация с частотой  $2\dot{\varphi}_0$  вокруг оси  $O\xi$ :  $\Omega_\xi = \Omega_\xi^0 \sin 2\dot{\varphi}_0 t$ ; ускорение  $W_\eta^0 = \text{const}$ ; линейная вибрация вдоль оси  $Oz$  с частотой  $\dot{\varphi}_0$  и ускорением  $W_z = W_z^0 \cos \dot{\varphi}_0 t$ ; имеется разбалансировка ротора  $l_x, l_y$ .

Проанализируем канал  $\alpha_\xi$  (для канала  $\beta_\eta$  методика аналогична). С учетом приведенных условий уравнение (89) при  $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$ ,  $\alpha_\xi = \alpha \cos \varphi$  принимает вид

$$K_\alpha \alpha = H(\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi) - B\dot{\Omega}_\xi \cos \varphi + M_y^{\text{вп}};$$

$$\frac{2K_\alpha \alpha_\xi}{H} = -\Omega_\eta^0 - \Omega_\eta^0 \cos 2\varphi + \Omega_\xi \sin 2\varphi - \frac{B\dot{\Omega}_\xi}{H}(1 + \cos 2\varphi) + \frac{2M_y^{BP} \cos \varphi}{H}. \quad (94)$$

Определим моменты  $M_y^{BP}$  для малых  $\alpha$  при заданных условиях (рис. 74).

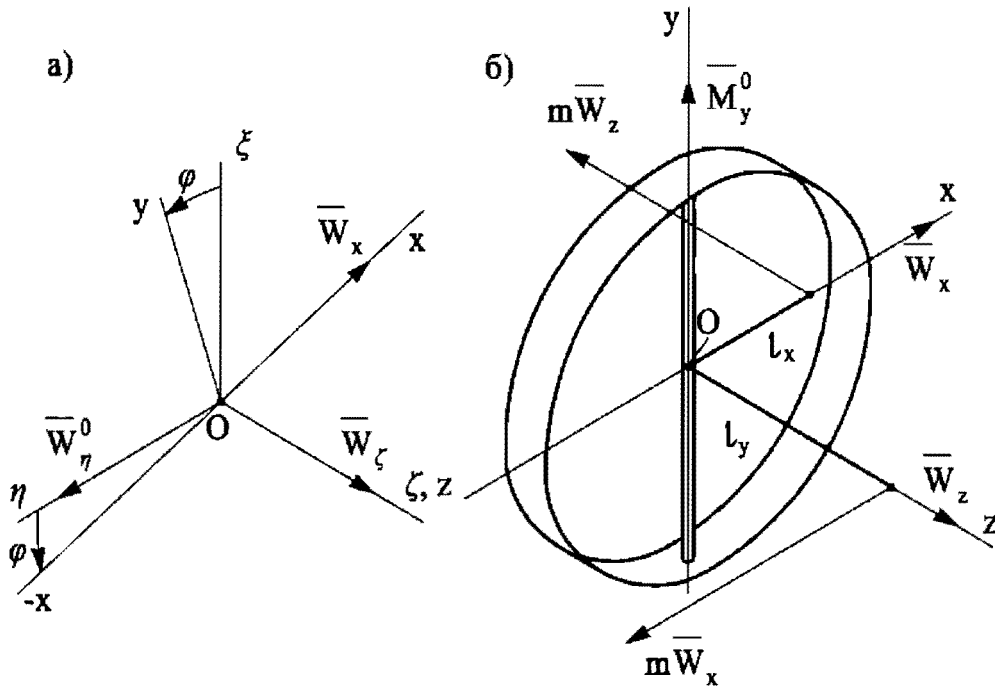


Рис. 74. К определению вредных моментов, действующих вокруг оси  $Oy$  торсиона

Проекции ускорений на оси СК  $Oxyz$  (рис. 74, а):

$$W_x = -W_\eta^0 \cos \varphi; \quad W_y = W_\eta^0 \sin \varphi; \quad W_z = W_\zeta = W_\zeta^0 \cos \varphi.$$

Определим момент, действующий вокруг оси  $Oy$  (рис. 74, б):

$$\begin{aligned} M_y^{BH} &= M_y^0 + mW_z l_x - mW_x l_z = \\ &= M_y^0 + ml_x W_\zeta^0 \cos \varphi + ml_z W_\eta^0 \cos \varphi, \end{aligned}$$

где  $M_y^0$  — постоянный внешний момент.

Запишем уравнение (94), учитывая только постоянные составляющие  $\alpha_\xi^*$ :

$$\frac{2K_\alpha \alpha_\xi^*}{H} = -\Omega_\eta^0 + \omega_1(g)n_\zeta + \omega_1^*(g)n_\eta + K_B \Omega_\xi^B, \quad (95)$$



где  $K_B = \frac{C - B - A}{2(C + B - A)}$  — коэффициент, характеризующий снижение влияния вибрации;  $\omega_1(g) = \frac{Gl_x}{H}$ ,  $\omega_1^*(g) = \frac{Gl_z}{H}$  — удельные составляющие ССП;  $n_\zeta = \frac{w_\zeta^0}{g}$ ;  $n_\eta = \frac{w_\eta^0}{g}$ .

Если учесть неравножесткость подвеса ротора (в частности, изгибную жесткость в направлении осей  $Ox$  и  $Oz$ ), то появится составляющая погрешности  $\omega_2(g^2)n^2$ .

Модель погрешности РВГ запишем в форме (44) ССП гиро-скопа:

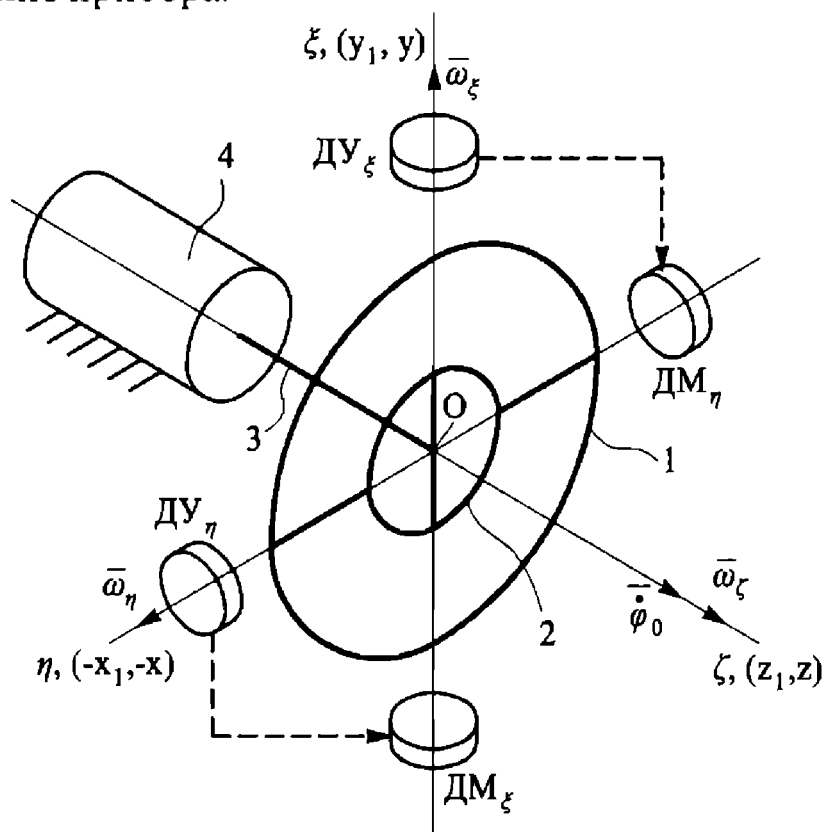
$$\Delta\Omega = \omega_0 + \omega_1(g)n_\zeta + \omega_1^*(g)n_\eta + \omega_2(g^2)n^2, \quad (96)$$

где  $\omega_0 = 2K_\alpha\alpha^*H^{-1} + K_B\Omega_\xi^B + \omega'_0$  ( $\omega'_0$  — дополнительная скорость дрейфа, не зависящая от перегрузки).

Наличие угла отклонения ротора  $\alpha^*$  приводит к увеличению погрешности РВГ. Модель (96) не учитывает погрешности, связанные с температурой, нестабильностью характеристик прибора и т. д. В связи с невысокой точностью РВГ находит ограниченное применение.

## 8. ДИНАМИЧЕСКИ НАСТРАИВАЕМЫЙ ГИРОСКОП

Динамически настраиваемый гироскоп (ДНГ) — трехступенной астатический гироскоп (рис. 75) с внутренним упругим кардановым подвесом, в котором обеспечена динамическая настройка таким образом, что моменты упругого подвеса уравниваются за целое число оборотов ротора центробежным моментом инерции кольца карданова подвеса. Отсюда название прибора.



**Рис. 75.** Схема ДНГ

Согласно рис. 76, оси СК  $O\xi\eta\zeta$  связаны с корпусом,  $Ox_1y_1z_1$  — с кольцом,  $Ox_2y_2z_2$  — с ротором. Двигатель 4 (см. рис. 75) приводит во вращение вал 3 с угловой скоростью  $\dot{\varphi}_0$ ,

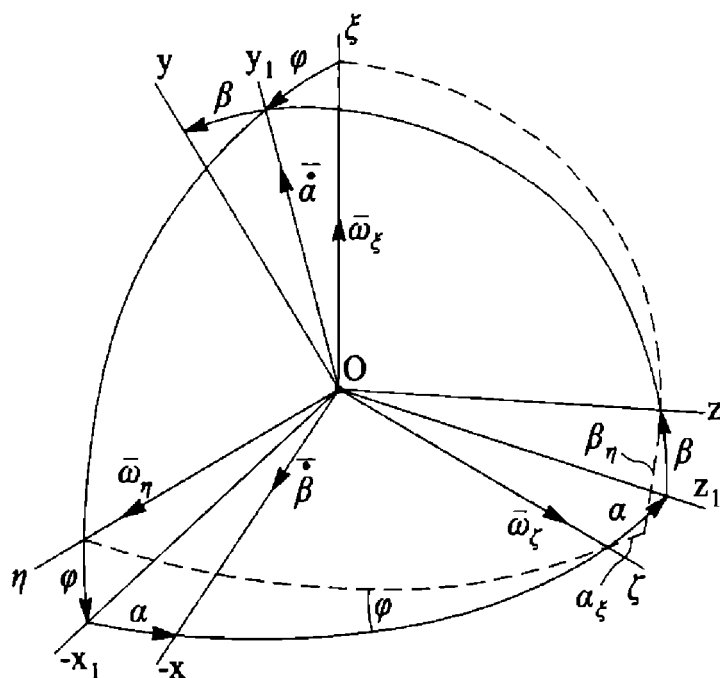


Рис. 76. Системы координат, используемые при составлении уравнений движения ДНГ

на котором с помощью торсиона установлено кольцо 2. Ротор 1 крепится с помощью торсионов к кольцу 2. При динамической настройке прибора можно считать, что ось ротора 1 сохраняет свое положение в инерциальном пространстве (с точностью до погрешностей).

Измеряя угловое положение  $\alpha_\xi$  и  $\beta_\eta$  ротора 1 относительно корпуса прибора вокруг осей  $O\xi$  и  $O\eta$  с помощью датчиков угла  $ДУ_\xi$  и  $ДУ_\eta$ , получают информацию об углах поворота корпуса (или платформы индикаторного гиросtabilизатора). При наличии «перекрестных» (показаны на рис. 75 штриховой линией) обратных связей  $ДУ_\xi — ДМ_\eta$ ,  $ДУ_\eta — ДМ_\xi$  прибор измеряет угловые скорости  $\omega_\xi$  и  $\omega_\eta$ , т. е. ДНГ работает в режиме двухкомпонентного ДУС (режим трехстепенного ДУС).

Так как ДНГ работает в схеме индикаторного гиросtabilизатора или в режиме ДУС, то углы отклонения ротора малы ( $< 1'$ ). В зависимости от количества кардановых колец различают одно- (см. рис. 75), двух- и  $n$ -кольцевые ДНГ [2]. Дополнительные кольца уменьшают погрешности прибора. Так, с помощью второго кольца на порядок уменьшаются погрешно-

сти, вызванные угловой вибрацией вала или корпуса на двойной частоте  $2\dot{\varphi}_0$  вращения ротора.

При вращении кольца 2 с частотой  $\dot{\varphi}_0$  возникают центробежные моменты инерции (за целое число оборотов)  $-0,5(A_1 + B_1 - C_1)\dot{\varphi}_0^2\alpha_\xi$ ,  $-0,5(A_1 + B_1 - C_1)\dot{\varphi}_0^2\beta_\eta$ , которые направлены против упругих моментов  $0,5(K_\alpha + K_\beta)\alpha_\xi$  и  $0,5(K_\alpha + K_\beta)\beta_\eta$ ; здесь  $A_1, B_1, C_1$  — моменты инерции кольца 2 относительно главных центральных осей инерции  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$ ;  $K_\alpha, K_\beta$  — угловые жесткости торсионов.

При условии равенства этих моментов осуществляется динамическая настройка:

$$0,5(A_1 + B_1 - C_1)\dot{\varphi}_0^2 = 0,5(K_\alpha + K_\beta);$$

$$K_\alpha + K_\beta = \dot{\varphi}_0^2(A_1 + B_1 - C_1).$$

В серийных образцах ДНГ такая настройка выполняется путем изменения соотношения моментов инерции (с помощью специальных масс (винтов) для динамической настройки):

$$A_1 + B_1 - C_1 = \frac{K_\alpha + K_\beta}{\dot{\varphi}_0^2}.$$

На завершающей стадии проектирования (при испытаниях) настройка может осуществляться изменением частоты вращения ротора  $\dot{\varphi}_0$ :

$$\dot{\varphi}_0 = \omega_0 = \sqrt{(K_\alpha + K_\beta)/(A_1 + B_1 - C_1)}.$$

Основное условие устойчивости ДНГ при выполнении настройки [2]:

$$C + B_1 > A + 0,5B_1,$$

где  $A, C$  — моменты инерции ротора относительно осей  $Ox$  и  $Oz$ .

При анализе погрешностей ДНГ можно пользоваться прецессионными уравнениями в неподвижной СК  $O\xi\eta\zeta$  с учетом специфики ДНГ [2], которая подразумевает образование гироскопических моментов  $H_1\omega_\xi$ ,  $-H_1\omega_\eta$  (рис. 77) при наличии переносных («внешних») угловых скоростей  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$  и гироскопических моментов  $H\dot{\alpha}_\xi$ ,  $-H\dot{\beta}_\eta$  при наличии относительных

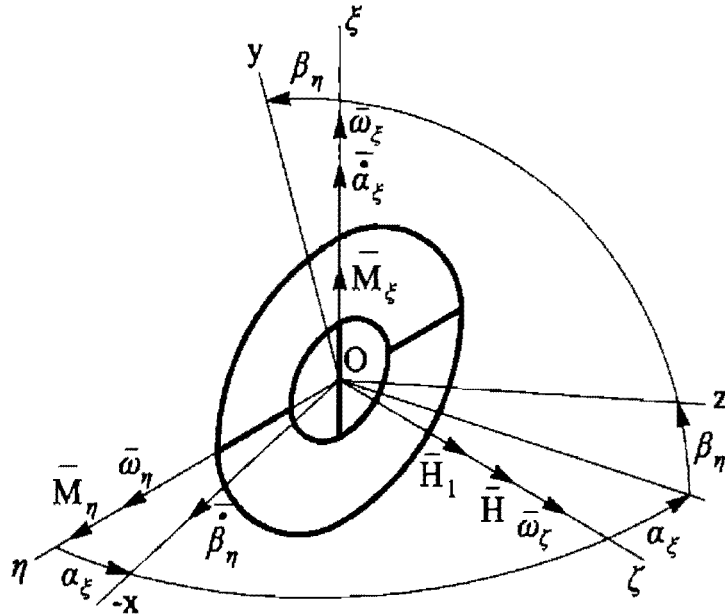


Рис. 77. К выводу прецессионных уравнений движения ДНГ

(«внутренних») угловых скоростей перемещения ротора относительно СК  $O\xi\eta\zeta$ ; здесь  $H = (C + B_1) \dot{\phi}_0$ ;  $H_1 = [C + 0,5(C_1 + B_1 - A_1)] \dot{\phi}_0$ ;  $H_1 < H$ .

Пользуясь правилом гироскопического момента, составим уравнения движения ДНГ (по Даламберу) относительно осей  $O\eta$ ,  $O\xi$  в соответствии с рис. 77 при малых  $\alpha_\xi$  и  $\beta_\eta$ :

$$\begin{aligned} H\dot{\alpha}_\xi + H_1\omega_\xi + M_\eta &= 0; \\ -H\dot{\beta}_\eta - H_1\omega_\eta + M_\xi &= 0. \end{aligned} \quad (97)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_\xi &= -\frac{H_1}{H} \omega_\xi - \frac{M_\eta}{H}; \\ \dot{\beta}_\eta &= -\frac{H_1}{H} \omega_\eta + \frac{M_\xi}{H}. \end{aligned}$$

При отсутствии внешних возмущающих моментов ( $M_\eta = 0, M_\xi = 0$ )

$$\begin{aligned} \alpha_\xi &= -h \int \omega_\xi(t) dt; \\ \beta_\eta &= -h \int \omega_\eta(t) dt, \end{aligned}$$

т. е. ДНГ работает в режиме интегрирующего (свободного) гироскопа с передаточным отношением  $i = \frac{H_1}{H} < 1$  (для свободного гироскопа в традиционном кардановом подвесе  $i = 1$ ).

Наличие возмущающих моментов  $M_\xi$  и  $M_\eta$  приводит к погрешности ДНГ. Собственная скорость прецессии гироскопа

$$\begin{aligned} \omega_{\text{ссп}\xi} = \dot{\alpha}_\xi &= -\frac{M_\eta}{H}; \\ \omega_{\text{ссп}\eta} = \dot{\beta}_\eta &= \frac{M_\xi}{H}. \end{aligned} \quad (98)$$

Проекции возмущающих моментов удобно определять относительно подвижной СК  $Oxyz$ , а затем находить их проекции на неподвижные оси СК  $O\xi\eta\zeta$  (рис. 78). При малых  $\alpha_\xi$  и  $\beta_\eta$

$$\begin{aligned} M_\xi &= M_y \cos \varphi + M_x \sin \varphi; \\ M_\eta &= M_y \sin \varphi - M_x \cos \varphi. \end{aligned} \quad (99)$$

Определим погрешность ДНГ, вызванную осевой разбалансировкой  $l_z$  ротора. Проекция силы тяжести  $\bar{G}$  ротора:

$$G_x = -G \sin \varphi;$$

$$G_y = -G \cos \varphi.$$

Силы  $\bar{G}_x$  и  $\bar{G}_y$  создают моменты вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 79, а):

$$M_x = -G_y l_z = G l_z \cos \varphi;$$

$$M_\eta = G_x l_z = -G l_z \sin \varphi.$$

В соответствии с выражениями (99)

$$M_\xi = -G l_z \sin \varphi \cos \varphi + G l_z \cos \varphi \sin \varphi = 0;$$

$$M_\eta = -G l_z \sin^2 \varphi - G l_z \cos^2 \varphi = -G l_z.$$

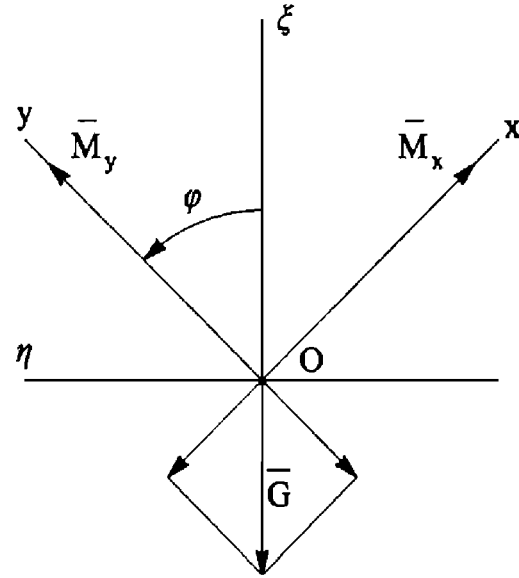


Рис. 78. К определению возмущающих моментов

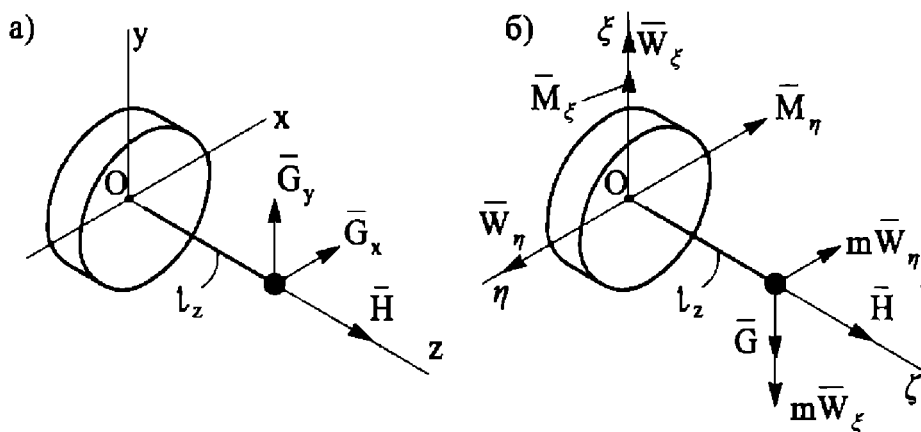


Рис. 79. К определению погрешностей ДНГ при осевой разбалансировке

Согласно уравнениям (98), собственная скорость прецессии ДНГ

$$\dot{\alpha}_{\xi} = \frac{Gl_z}{H}.$$

Этот результат совпадает с моделью рис. 79, б, из которого непосредственно следует

$$\dot{\alpha}_{\xi} = \frac{M_{\eta}}{H} = \frac{Gl_z}{H}. \quad (100)$$

Приведенная методика определения возмущающих моментов удобна для случая анализа погрешностей ДНГ при вибрации, технологическом несовершенстве конструкции и т. п.

Воспользуемся формулой (100) для определения погрешностей ДНГ в условиях действия линейных перегрузок  $n_{\xi} = W_{\xi}/g$ ,  $n_{\eta} = W_{\eta}/g$  при  $l_z \neq 0$  (см. рис. 79, б):

$$\begin{aligned} \omega_{\xi}(n_{\xi}) &= \frac{mW_{\xi}l_z}{H} = \omega_1(g)n_{\xi}; \\ \omega_{\eta}(n_{\eta}) &= \frac{mW_{\eta}l_z}{H} = \omega_1(g)n_{\eta}, \end{aligned} \quad (101)$$

где  $\omega_1(g) = \frac{Gl_z}{H}$  — удельная ССП, вызванная осевой разбалансировкой. Радиальная разбалансировка ( $l_x$ ,  $l_y$ ) ротора при принятых допущениях не влияет на точность ДНГ на неподвижном основании. Однако с появлением возмущений, изменяющихся с частотой  $\dot{\phi}_0$  (например, при вибрации), появляются

ся постоянные моменты при  $l_x \neq 0$ ,  $l_y \neq 0$ , вызывающие ССП; поэтому необходимо устранять и радиальную разбалансировку ( $l_x \rightarrow 0$ ,  $l_y \rightarrow 0$ ).

Особое значение при определении точности ДНГ приобретает расчет так называемых квадратурных моментов (КМ). Вектор КМ совпадает с вектором возмущающей силы, которая его вызвала. Например, при действии на упругую опору (торсион) растягивающей (или сжимающей) силы возникает КМ, пропорциональный углу «закрутки» торсиона  $\Delta\psi$ , возникающей при технологическом несовершенстве упругой опоры (изготовлении и сборке), изменении температуры окружающей среды и т. д.

При наличии ускорений  $\bar{W}_\xi$ ,  $\bar{W}_\eta$  и  $\Delta\psi \neq 0$  возникают моменты  $\bar{M}_{KM\xi}(W_\xi) = K_\xi \Delta\psi t \bar{W}_\xi$  и  $\bar{M}_{KM\eta}(W_\eta) = K_\eta \Delta\psi t \bar{W}_\eta$ , где  $K_\xi$ ,  $K_\eta$  — коэффициенты пропорциональности, которые определяются конструкцией подвеса (рис. 80).

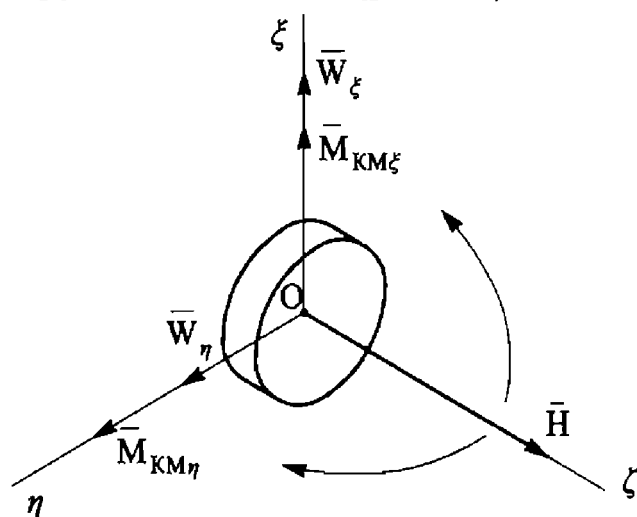


Рис. 80. К определению КМ

Обозначим  $\omega_{KB}(g) = K_\xi \Delta\psi G/H$  удельную собственную скорость прецессии, обусловленной  $M_{KM\xi}$ , и, соответственно  $\omega'_{KB}(g) = K_\eta \Delta\psi G/H$ . С учетом этого определим ССП:

$$\begin{aligned} \omega_{KB\xi} &= -\frac{M_{KM\eta}}{H} = -\omega'_{KB}(g)n_\eta; \\ \omega_{KB\eta} &= \frac{M_{KM\xi}}{H} = \omega_{KB}(g)n_\xi. \end{aligned} \quad (102)$$



Причины появления КМ могут быть различными: радиальная разбалансировка, газодинамические моменты, технологические несовершенства и др.

Нежесткость конструкции приводит к погрешностям ДНГ (аналогично гирокоспу в кардановом подвесе). На рис. 81 показана модель ротора ДНГ, подвес которого имеет радиальную жесткость  $C_r$  и осевую жесткость  $C_a$ . Под действием инерционных сил  $m\bar{W}_\xi$  и  $m\bar{W}_\zeta$  центр масс ротора смещается на  $\Delta_r = mW_\xi/C_r$ ,  $\Delta_a = mW_\zeta/C_a$  и возникает возмущающий момент вокруг оси  $O\eta$ :

$$\begin{aligned} M_\eta &= mW_\xi\Delta_a - mW_\zeta\Delta_r = m^2W_\xi W_\zeta \cdot K_{\text{нж}} = \\ &= 0,5G^2K_{\text{нж}}n_\xi n_\zeta \sin 2\theta, \end{aligned}$$

где  $K_{\text{нж}} = (C_a^{-1} - C_r^{-1})$  — коэффициент неравножесткости упругого подвеса ротора ДНГ в осевом и радиальном направлениях.

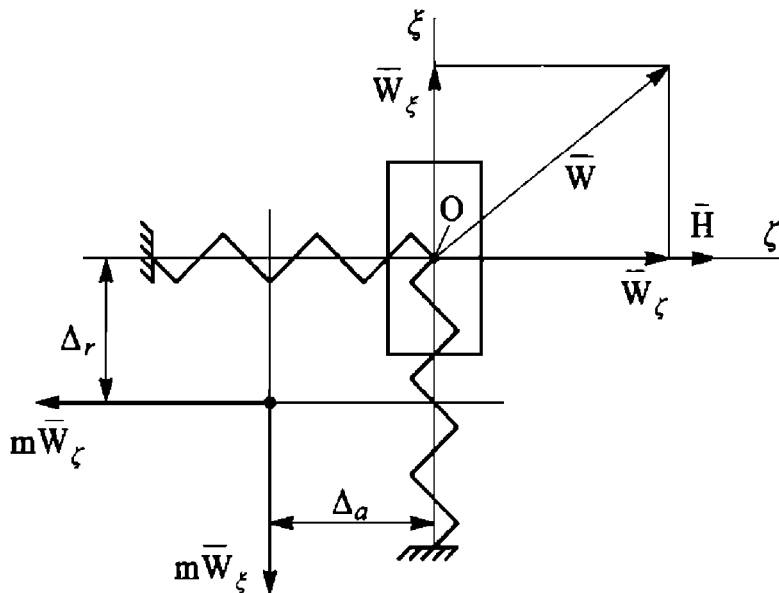


Рис. 81. К определению момента неравножесткости

Обозначив удельную составляющую ССП, вызванную неравножесткостью крепления ротора, через  $\omega_2(g^2) = 0,5K_{\text{нж}}G^2/H$ , получим при  $\theta = 45^\circ$

$$\begin{aligned} \omega_\xi(n^2) &= \omega_2(g^2)n_\xi n_\zeta; \\ \omega_\eta(n^2) &= \omega_2(g^2)n_\eta n_\zeta. \end{aligned} \tag{103}$$

При проектировании подвеса ротора необходимо обеспечить равножесткость крепления ротора:  $C_r \approx C_a$ .

При вибрации момент, вызванный нежесткостью крепления ротора, определяют с учетом фактических значений амплитудных и фазовых характеристик упругой системы.

Диссипативные моменты приводят к погрешности гироскопа. Воспользуемся уравнениями движения ДНГ, в которых учитываются только гироскопические и демпфирующие моменты:

$$H\dot{\beta}_\eta + D\dot{\phi}_0\beta_\eta = 0;$$

$$H\dot{\alpha}_\xi + D\dot{\phi}_0\alpha_\xi = 0$$

или

$$T\dot{\beta}_\eta + \beta_\eta = 0;$$

$$T\dot{\alpha}_\xi + \alpha_\xi = 0,$$

где  $T = \frac{H}{D\dot{\phi}_0} = \frac{C+B_1}{D}$  — постоянная времени прецессионного движения ДНГ.

Пусть имеются угловые отклонения  $\alpha_\xi^*$ ,  $\beta_\eta^*$  (не более 1') ротора в СК  $O\xi\eta\zeta$ . Тогда ССП, вызванная диссипативными моментами,

$$\omega_{\eta T} = -\frac{\beta_\eta^*}{T}; \quad \omega_{\xi T} = -\frac{\alpha_\xi^*}{T}. \quad (104)$$

С увеличением постоянной времени  $T$  погрешности ДНГ (104) уменьшаются. Обычно  $T = 60 \dots 200$  с.

Модель ССП ДНГ в зависимости от перегрузки запишем с учетом выражений (101)—(104):

$$\begin{aligned} \omega_\xi(n) &= \omega_{0\xi} + \omega_{\xi T} + \omega_1(g)n_\xi - \omega'_{\text{кв}}(g)n_\eta + \omega_2(g^2)n_\xi n_\zeta; \\ \omega_\eta(n) &= \omega_{0\eta} + \omega_{\eta T} + \omega_1(g)n_\eta + \omega_{\text{кв}}(g)n_\xi + \omega_2(g^2)n_\eta, \end{aligned} \quad (105)$$

где  $\omega_{0\xi}$  — составляющая ССП, не зависящая от перегрузки и определяемая неточностью динамической настройки, магнитными полями, газодинамикой.

Выражения (105) используются при определении точности ДНГ, составляющих ССП при испытаниях прибора, осуществлении алгоритмической компенсации составляющих ССП с учетом их изменения во времени, под действием перегрузки,

температуры окружающей среды. Для уменьшения влияния последнего из этих факторов в ДНГ применяют систему термостатирования [2].

Для измерения угловых скоростей  $\omega_\xi$  и  $\omega_\eta$  используют режим ДНГ—ДУС, применяя перекрестные обратные связи (рис. 82) по моменту.

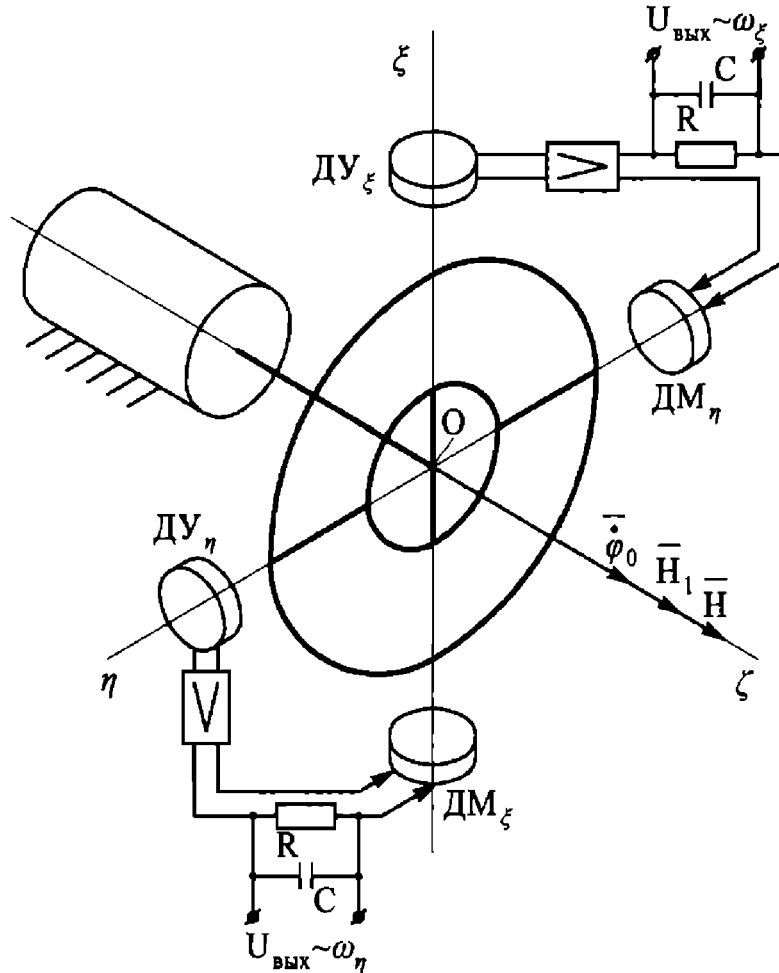


Рис. 82. Схема ДНГ—ДУС

В соответствии с (97) составим прецессионные уравнения движения ДНГ относительно осей  $O\eta$  и  $O\xi$  с учетом моментов датчиков  $ДМ_\xi$  и  $ДМ_\eta$ , пренебрегая демпфирующими моментами:

$$\begin{aligned} H\dot{\alpha}_\xi + H_1\omega_\xi - K\alpha_\xi + M_\eta &= 0; \\ -H\dot{\beta}_\eta - H_1\omega_\eta + K\beta_\eta + M_\xi &= 0, \end{aligned}$$

где  $K$  — коэффициент усиления цепи обратной связи, или жесткость компенсационного контура.

В установившемся режиме работы при  $M_\eta = M_\xi = 0$

$$\alpha_\xi = \frac{H_1}{K} \omega_\xi; \quad \beta_\eta = \frac{H_1}{K} \omega_\eta,$$

т. е. при наличии обратных связей ДНГ становится двухкомпонентным ДУС.

Выходной сигнал с ДНГ—ДУС

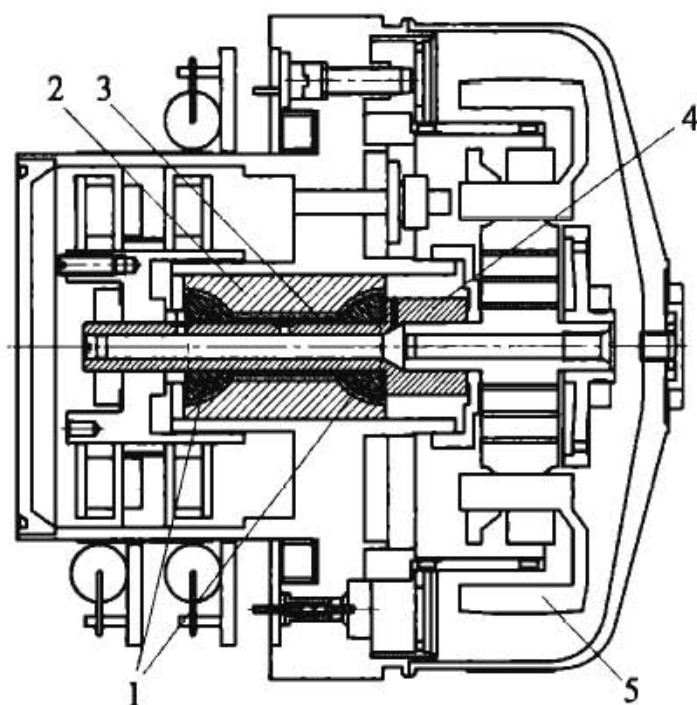
$$U_{\text{вых}\xi} = Ri_{\text{ДМ}} = \frac{H_1 R}{K_{\text{ДМ}}} \omega_\xi = h\omega_\xi; \quad U_{\text{вых}\eta} = h\omega_\eta,$$

где  $h$  — чувствительность ДНГ—ДУС;  $i_{\text{ДМ}}$  — ток ДМ.

Нестабильность чувствительности

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta H_1}{H_1} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta K_{\text{ДМ}}}{K_{\text{ДМ}}}.$$

Величина  $\Delta H_1$  сводится к минимуму путем управления синхронным гистерезисным двигателем по частоте от кварцевого генератора (с точностью до  $10^{-4}$ ); величина  $\Delta R$  также незначительна. При разработке прибора принимаются меры,



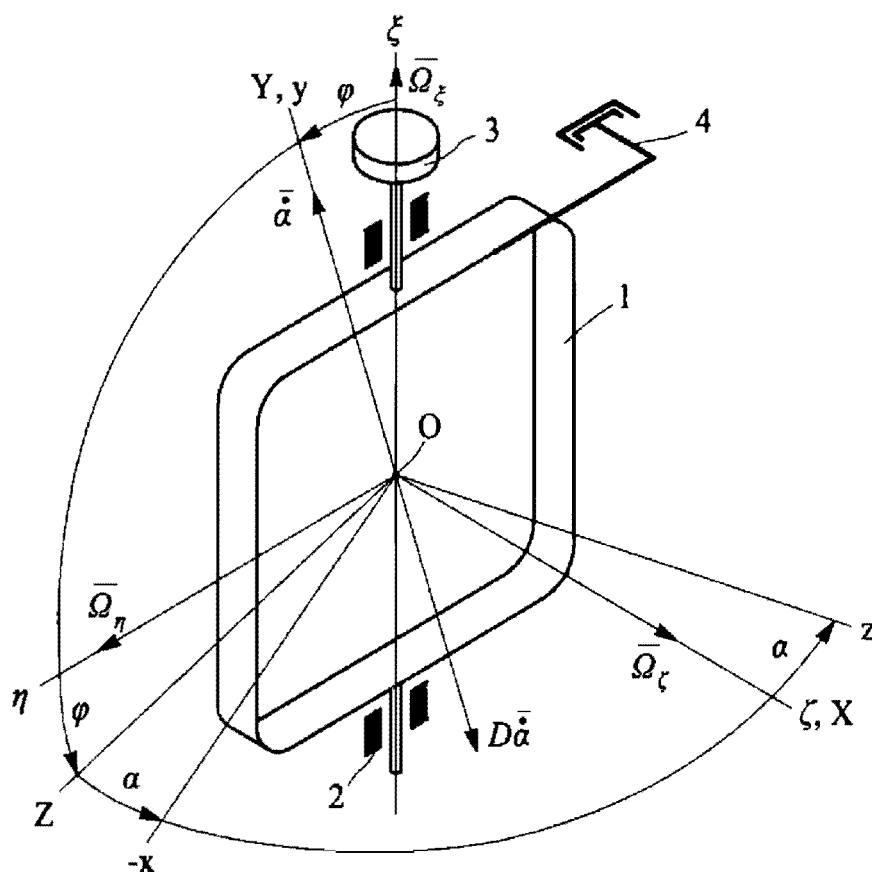
**Рис. 83.** Конструктивная схема ДНГ с полусферическими газодинамическими опорами:

1 — две полусферические опоры; 2 — втулка поднятника; 3 — распорная втулка для регулирования осевого зазора; 4 — валик; 5 — упругий подвес

обеспечивающие минимальное значение  $\Delta K_{\text{дм}}$  [2]: введение дополнительного сопротивления для компенсации изменения  $R_{\text{дм}}(t \text{ } ^\circ\text{C})$ , рациональный выбор характеристик магнитной системы, технологические мероприятия и др. Влияние моментов  $M_\eta$ ,  $M_\xi$  на точность ДНГ—ДУС оценивается моделью (105) по вышеизложенной методике для ДНГ (режим интегрирующего гироскопа). ДНГ—ДУС применяют в БИНС. На рис. 83 показана конструктивная схема ДНГ с двумя газодинамическими опорами.

## 9. ВИБРАЦИОННЫЙ РАМОЧНЫЙ ГИРОСКОП

В вибрационном рамочном гироскопе (см. рис. 22) чувствительный элемент — рамка — имеет одну степень свободы относительно корпуса, вращаясь в камневых опорах (рис. 84). Кинетический момент рамки образуется вследствие вращения объекта (ракеты) вокруг продольной оси со скоростью  $\Omega_z = \dot{\varphi}$  (обычно 10...20 об/с). На корпусе рамки имеются обмотки, которые находятся в поле постоянных магнитов, поэтому при



**Рис. 84.** К выводу уравнений ВРГ:

1 — рамка; 2 — камневая опора; 3 — датчик угла  $D\varphi$ ; 4 — демпфирующее устройство

наличии угловой скорости  $\dot{\alpha}$  вращения рамки относительно корпуса возникает демпфирующий момент  $D\dot{\alpha}$  (магнитно-индукционное демпфирование). Вывод уравнений ВРГ аналогичен выводу уравнений РВГ. С методической целью получим уравнения движения ВРГ с помощью уравнений Эйлера (ср. с введением).

Выберем базовую СК  $O\xi\eta\zeta$ , относительно которой корпус ВРГ (СК  $OXYZ$ ) поворачивается угол  $\varphi = \Omega_\zeta t = \dot{\varphi}t$ . СК  $Oxyz$  связана с рамкой гироскопа. Уравнение движения рамки по Даламберу

$$-B\dot{\Omega}_y + C\Omega_z\Omega_x - A\Omega_x\Omega_z + M_y = 0,$$

по Эйлеру

$$B\dot{\Omega}_y - (C - A)\Omega_x\Omega_z = M_y. \quad (106)$$

Здесь  $A, B, C$  — моменты инерции рамки относительно осей  $Ox, Oy, Oz$ ;  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  — проекции абсолютной угловой скорости на оси СК  $Oxyz$ ;  $M_y = (M_y^{\text{BP}} + M_y^{\text{YPP}} - D\dot{\alpha})$  — момент внешних сил вокруг оси  $Oy$ , где  $M_y^{\text{BP}}$  — момент вредных сил (момент сил трения, момент разбалансировки; момент токоподводов, газодинамический момент и др.);  $M_y^{\text{YPP}}$  — управляющий момент (момент обратной связи);  $D$  — удельный демпфирующий момент.

Для малого угла  $\alpha$

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \Omega_\xi \sin \varphi \cos \alpha - \Omega_\eta \cos \varphi \cos \alpha - \Omega_\zeta \sin \alpha \approx \\ &\approx \Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi - \dot{\varphi}\alpha; \end{aligned}$$

$$\Omega_y = \dot{\alpha} + \Omega_\xi \cos \varphi + \Omega_\eta \sin \varphi;$$

$$\Omega_z = \Omega_\zeta \cos \alpha - \Omega_\eta \cos \varphi \sin \alpha + \Omega_\xi \sin \varphi \sin \alpha \approx \dot{\varphi};$$

$$\dot{\Omega}_y = \ddot{\alpha} + \dot{\Omega}_\xi \cos \varphi + \dot{\Omega}_\eta \sin \varphi - \Omega_\xi \dot{\varphi} \sin \varphi + \Omega_\eta \dot{\varphi} \cos \varphi;$$

$$\Omega_x\Omega_z = \dot{\varphi}(\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi) - \dot{\varphi}^2\alpha.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (106):

$$\begin{aligned} B\ddot{\alpha} + D\dot{\alpha} + (C - A)\dot{\varphi}^2\alpha &= (C - A + B)\dot{\varphi}(\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi) - \\ &- B(\dot{\Omega}_\xi \cos \varphi + \dot{\Omega}_\eta \sin \varphi) + M_y^{\text{BP}} + M_y^{\text{YPP}}. \end{aligned} \quad (107)$$

Приведем уравнение (107) к стандартному виду, полагая  $M_y^{BP} = 0, M_y^{ypp} = 0, \Omega_\xi = \text{const}, \Omega_\eta = \text{const}, \varphi = \dot{\varphi}_0$ :

$$\ddot{\alpha} + 2\xi\omega_0\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = \frac{H}{B}\Omega \sin(\dot{\varphi}_0 t - \delta), \quad (108)$$

где  $\xi$  — относительная степень затухания;  $\omega_0$  — собственная частота незатухающих колебаний ВРГ;  $\omega_0^2 = \frac{C-A}{B}\dot{\varphi}_0^2$ ;  $H = (C+B-A)\dot{\varphi}_0$  — кинетический момент ВРГ;  $\Omega = \sqrt{\Omega_\xi^2 + \Omega_\eta^2}$ ;  $\delta = \text{arctg} \frac{\Omega_\eta}{\Omega_\xi}$ .

Решение уравнения (108):

$$\alpha = \lambda \frac{C+B-A}{\dot{\varphi}_0(C-A)} \Omega \sin(\dot{\varphi}_0 t - \delta - \chi),$$

где  $\lambda$  — коэффициент динамичности;  $\chi$  — сдвиг по фазе.

Для дорезонансного режима при  $\dot{\varphi}_0 \ll \omega_0$

$$\alpha = \frac{C+B-A}{\dot{\varphi}_0(C-A)} (\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi). \quad (109)$$

Для резонансного режима при  $\omega_0 = \dot{\varphi}_0$ , т. е. при  $C = A + B, \lambda = \frac{1}{2\xi} = \frac{B\omega_0}{D} = \frac{B\dot{\varphi}_0}{D}, \chi = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\alpha = -\frac{2B}{D} (\Omega_\xi \cos \varphi - \Omega_\eta \sin \varphi). \quad (110)$$

Выражения (109), (110) показывают, что ВРГ является двухкомпонентным ДУС. Если учесть  $\dot{\Omega}_\xi, \dot{\Omega}_\eta$  и  $M_y^{BP}$ , то уравнение (107) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + 2\xi\omega_0\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha &= \\ &= \frac{H}{B}\Omega \sin(\dot{\varphi}_0 t - \delta) - \dot{\Omega} \cos(\dot{\varphi}_0 t - \delta) + \frac{M_y^{BP}}{B}, \end{aligned} \quad (111)$$

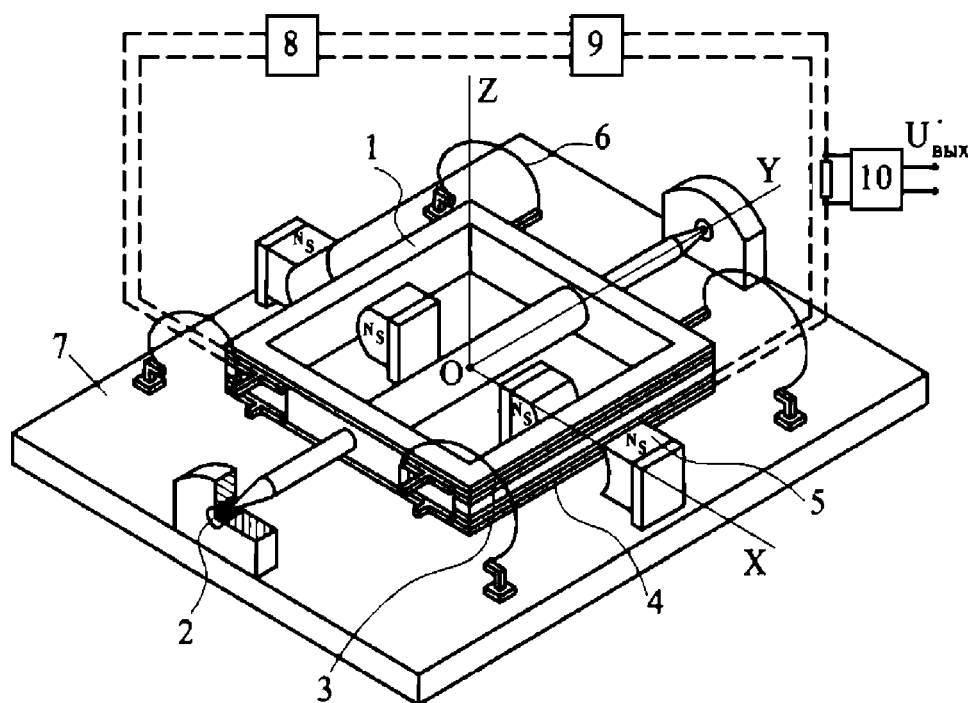
где  $\dot{\Omega} = \sqrt{\dot{\Omega}_\xi^2 + \dot{\Omega}_\eta^2}$ ;  $\delta_1 = \text{arctg} \dot{\Omega}_\xi / \dot{\Omega}_\eta$ .

Статическое решение уравнения (111) при  $\dot{\varphi} \ll \omega_0$ :

$\alpha_* = [H(\Omega_\xi \sin \varphi - \Omega_\eta \cos \varphi) - B(\dot{\Omega}_\xi \cos \varphi + \dot{\Omega}_\eta \sin \varphi) + M_y^{BP}]K^{-1}$ ,  
где  $K = (C-A)\dot{\varphi}_0^2$  — квазижесткость.



При обеспечении соответствующей обработки сигнала (фильтрации) можно получить информацию и по угловому ускорению  $\dot{\Omega}_\xi, \dot{\Omega}_\eta$ .



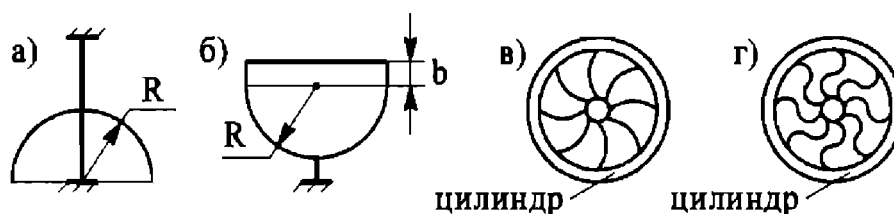
**Рис. 85.** Конструктивная схема ВРГ:

1 — рамка с бескаркасными обмотками; 2 — камневая опора; 3 — сигнальная обмотка ДУ; 4 — обмотка ДМ; 5 — магнит; 6 — токоподвод; 7 — корпус; 8 — предварительный усилитель; 9 — усилитель; 10 — блок съема и преобразования информации

Как было указано, ВРГ (рис. 85) — прибор низкой точности (порог чувствительности  $\approx 1,5^\circ/\text{с}$ ), однако он получил распространение благодаря простоте конструкции, низкой стоимости, малым массогабаритным характеристикам, способности работать при перегрузках. Введение обратной скоростной (по  $\dot{\alpha}$ ) связи повышает точность прибора (на рис. 85 эта связь показана штриховой линией).

## 10. ВОЛНОВОЙ ТВЕРДОТЕЛЬНЫЙ ГИРОСКОП

В конце XX в. распространение получил волновой твердотельный гироскоп (ВТГ). Основным элементом ВТГ является резонатор в форме полусферы (рис. 86, а и б) или цилиндра (рис. 86, в и г). Для прецизионных ВТГ полусферический резонатор и элементы его крепления (ножки) изготавливают из одной монокристаллической заготовки плавленого кварца (см. рис. 86, а). Модульная конструкция резонатора, состоящая из двух деталей — полусферы и ножки, имеет большие технологические погрешности. Крепление резонатора осуществляется с помощью ножек полусферы (см. рис. 86, а и б), упругих элементов (см. рис. 86, в и г), которые могут быть выполнены в форме архимедовой спирали или синусоиды. Для ВТГ средней точности резонаторы изготавливают из фтористой бронзы, дюралюминия с малым конструкционным демпфированием. При изготовлении резонаторов микромеханических гироскопов (см. рис. 86, в и г) используется кремниевая технология.



**Рис. 86.** Резонаторы ВТГ:

*a* — полусферический; *б* — полусферический с цилиндрической кромкой высотой *b*; *в, г* — цилиндрические микромеханического гироскопа

Возбуждение осуществляется на собственной частоте  $\omega_0 = \nu_0 = 2\pi f_0$ . Для цилиндрического резонатора

$$f_0 = \frac{\nu_0}{2\pi} = l(K) \frac{h}{2\pi R^2} \sqrt{\frac{E}{2(1 + \mu)\rho}}, \text{ Гц,}$$

где  $l(K)$  — величина, которая зависит от формы колебаний кольца и характеризуется параметром  $K$  — половиной числа узловых меридианов (для основной первой формы (рис. 87) колебаний  $K = 2$ , тогда  $l(K) = 2,62$ );  $h, R$  — размеры кольца;  $E, \mu, \rho$  — модуль упругости I рода, коэффициент Пуассона и плотность материала кольца. Для плавленого кварца  $\mu \approx 0,18$ .

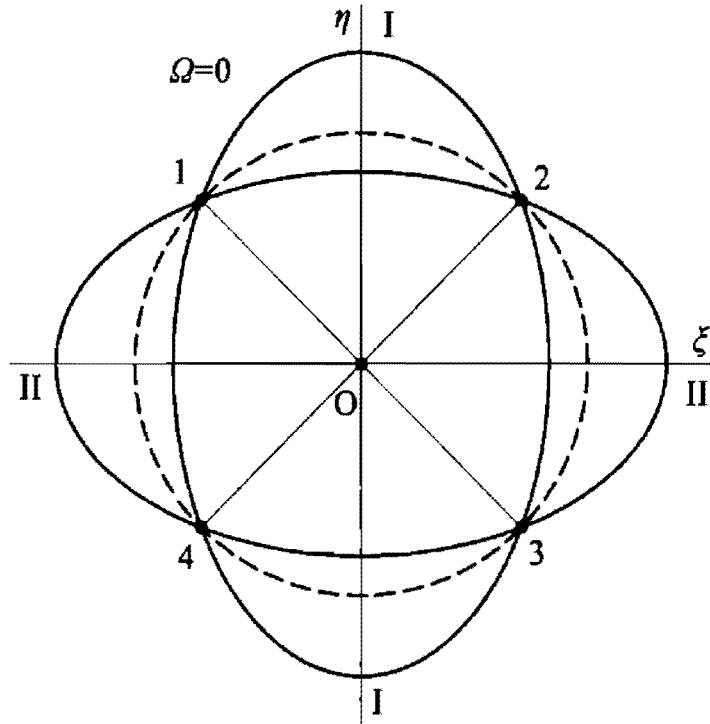


Рис. 87. Диаграмма вибрации ВТГ

Диаграмма вибрации (ДВ) резонатора показана на рис. 87. Колебания происходят по двум взаимно перпендикулярным осям I—I и II—II; точки 1—4 называют узлами ДВ, и их положение остается неизменным при колебании (сжатие и растяжение) резонатора. Основная задача — обеспечение равенства частот колебаний  $f_{I-I} = f_{II-II}$  с высокой точностью. Вследствие неравномерного распределения масс, технологических погрешностей, различных свойств материала в направлениях I—I и II—II приведенные массы  $m_I \neq m_{II}$ , жесткости  $c_I \neq c_{II}$  и коэффициенты демпфирования  $d_I \neq d_{II}$ . Собственные частоты незатухающих колебаний:  $\omega_{0I} = \sqrt{\frac{c_I}{m_I}}$ ;  $\omega_{0II} = \sqrt{\frac{c_{II}}{m_{II}}}$ .

Технологически регулируемым параметром может быть масса  $\Delta m = (m_I - m_{II}) \rightarrow 0$ , которую изменяют при баланси-

ровке резонатора путем удаления масс с его кромки с помощью технологического лазера (иногда для этой цели на кромке резонатора выполняют специальные зубцы или используют торцевую поверхность резонатора). Тогда  $\Delta f \rightarrow 0$ .

Разные коэффициенты демпфирования  $d_I$  и  $d_{II}$  приводят к различию потерь энергии в направлении осей I—I и II—II, т. е. к «разнодобротности» резонатора, являющейся также причиной погрешности ВТГ. Для прецизионных ВТГ достигнута добротность кварцевого резонатора  $(1 \dots 2) \cdot 10^7$ . Напыление электродов систем возбуждения и съема информации существенно снижает добротность.

Возбуждение резонатора осуществляется двумя способами:

- 1) позиционное возбуждение (рис 88, а) при реализации режима ДУС (показано только два электрода);
- 2) параметрическое (рис. 88, б) с помощью кольцевого электрода (КЭ) при реализации режима ИГ.

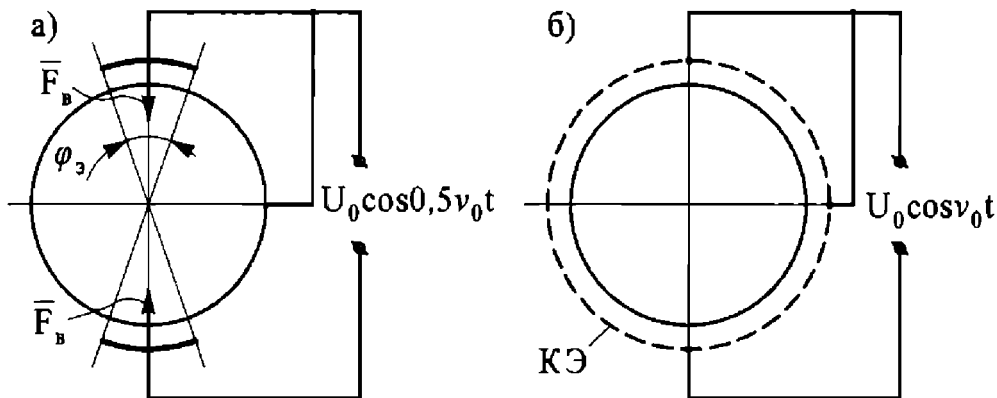
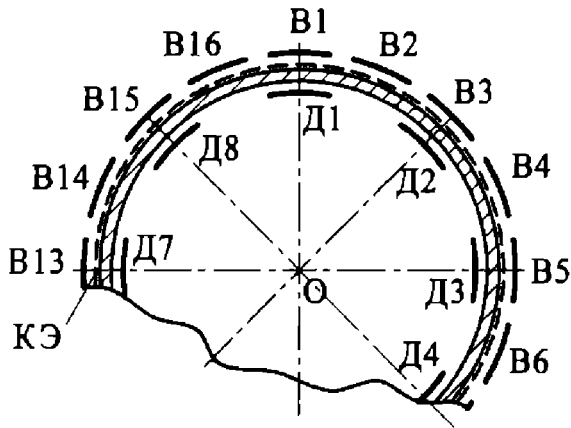


Рис. 88. Схемы возбуждения резонатора ВТГ:

а — позиционное; б — параметрическое

Для уменьшения влияния на точность ВТГ погрешностей формы применяют 16 электродов системы позиционного возбуждения. Режим параметрического возбуждения для снижения потребляемой мощности осуществляют после предварительного возбуждения резонатора с помощью системы позиционного возбуждения, т. е. включение кольцевого электрода «поддерживает» колебания резонатора, компенсируя потери.



**Рис. 89.** Схема расположения электродов позиционного возбуждения В1—В16 и датчиков положения перемещения Д1—Д8 диаграммы вибрации ВТГ

Положение узловых точек определяют с помощью системы емкостных датчиков Д1—Д8. Система Д1—Д8 фиксирует угол  $\varphi$ , характеризующий положение ДВ относительно основания (рис. 89).

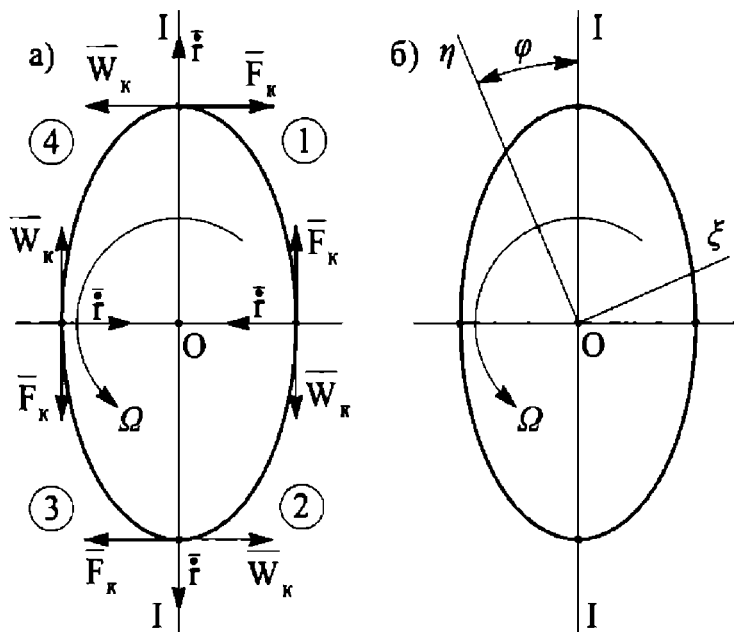
Рассмотрим принцип измерения угла  $\psi$  поворота основания с помощью ВТГ.

При колебании  $r = r_0 \sin v_0 t$  резонатора относительная скорость  $\dot{r} = r_0 v_0 \cos v_0 t$  приведенной массы  $m$  при наличии угловой

скорости  $\Omega_z = \Omega$  основания является причиной возникновения кориолисова ускорения  $W_k = 2\dot{r}\Omega = 2\Omega r_0 v_0 \cos v_0 t$ .

Кориолисовы силы  $F_k = mW_k$  сжимают упругий резонатор в областях 1 и 3 (рис. 90, а), растягивают его в областях 2 и 4 и образуют гироскопический момент

$$M_\Gamma = 2mr_0^2 v_0 \Omega \sin 2v_0 t.$$



**Рис. 90.** К пояснению принципа работы ВТГ

Действие гироскопического момента уменьшает скорость вращения ДВ ( $\omega_{ДВ} < \Omega$ ) вокруг оси  $OZ$  в инерциальном пространстве (упругая волна отстает от основания на угол  $\varphi$ ). Параметр  $\omega_{ДВ}$  называют скоростью прецессии (волны); для цилиндрического резонатора  $\omega_{ДВ} = \frac{K^2-1}{K^2+1} \Omega$ .

Для основной формы колебаний  $K = 2$  и  $\omega_{ДВ} = 0,6\Omega$ .

Угол отставания ДВ (рис. 90, б)

$$\varphi = (\Omega - \omega_{ДВ})t = \frac{2}{K^2+1} \Omega t = \frac{2}{K^2+1} \psi = h' \psi.$$

При  $K = 2$   $h' = \frac{2}{K^2+1} = 0,4$ , следовательно,  $\varphi = 0,4\psi$  — для идеального цилиндра, в случае полусферы  $h' = 0,28$  и  $\varphi \approx 0,28\psi$ .

Расчет  $h'$  ведется с помощью представления резонатора как упругой оболочки или с применением методов анализа поведения упругой волны в резонаторе [3].

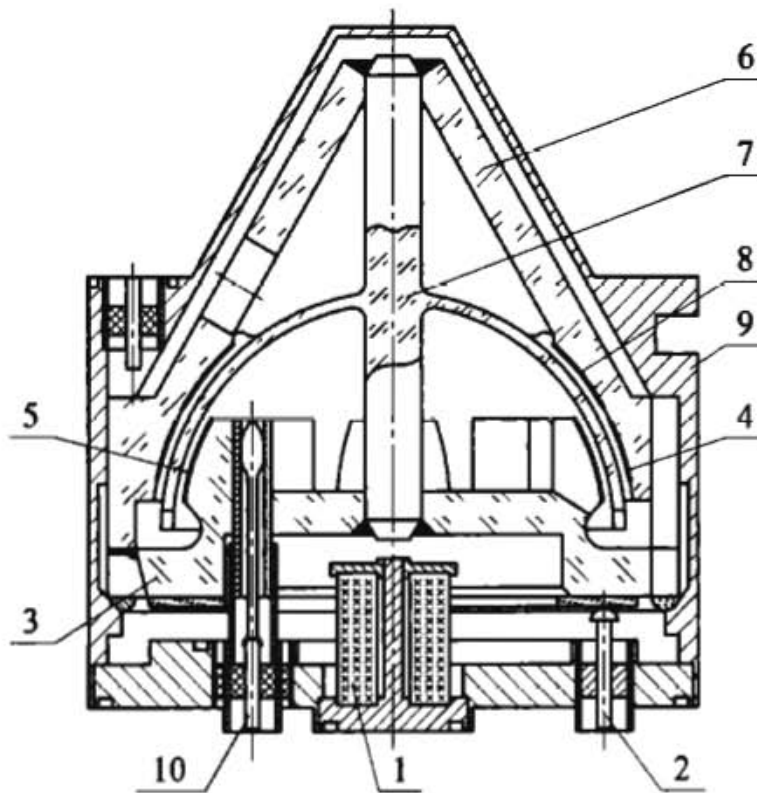


Рис. 91. Конструктивная схема ВТГ:

1 — встроенный насос; 2, 10 — гермоводы; 3, 6 — внутренний и наружный корпуса; 4 — электрод возбуждения; 5 — датчик положения; 7 — резонатор; 8 — КЭ; 9 — кожух

К электронным системам возбуждения, съема и обработки информации, балансировки и управления ДВ предъявляют жесткие требования по стабильности характеристик и надежности. При высокочастотных резонаторах удается разработать прецизионный ВТГ со скоростью дрейфа 0,01...0,001 °/ч. На рис. 91 приведена конструктивная схема ВТГ с полусферическим резонатором.

В качестве недостатков прецизионных ВТГ отметим высокую стоимость и энергопотребление, а также значительные массогабаритные характеристики. Использование цилиндрических резонаторов в микромеханических гироскопах последний недостаток устраняет, но с потерей точности.

ВТГ имеет малое время готовности, длительный срок эксплуатации ( $> 10^5$  ч), надежно работает в условиях высоких линейных и вибрационных перегрузок, радиации, при перепадах температур.

На базе ВТГ построены навигационные системы для КЛА, самолетов, вертолетов, тактических ракет, автомобилей.

## 11. ОПТИЧЕСКИЕ ГИРОСКОПЫ

### Волоконно-оптический гироскоп

Оптические гироскопы строятся на базе пассивного кольцевого интерферометра (источник излучения — лазер — находится вне оптического контура) и активного интерферометра (кольцевой лазер с оптическим резонатором).

Рассмотрим принцип действия пассивного интерферометра (рис. 92), представляющего собой замкнутый кольцевой световод, в котором луч от внешнего источника (лазера) 4 разделяется с помощью оптического устройства 3 на два (1 и 2) встречно-направленных луча.

Интерферометр имеет регистрирующее устройство, состоящее из оптического смесителя лучей 1, 2 и фотоприемника 5,

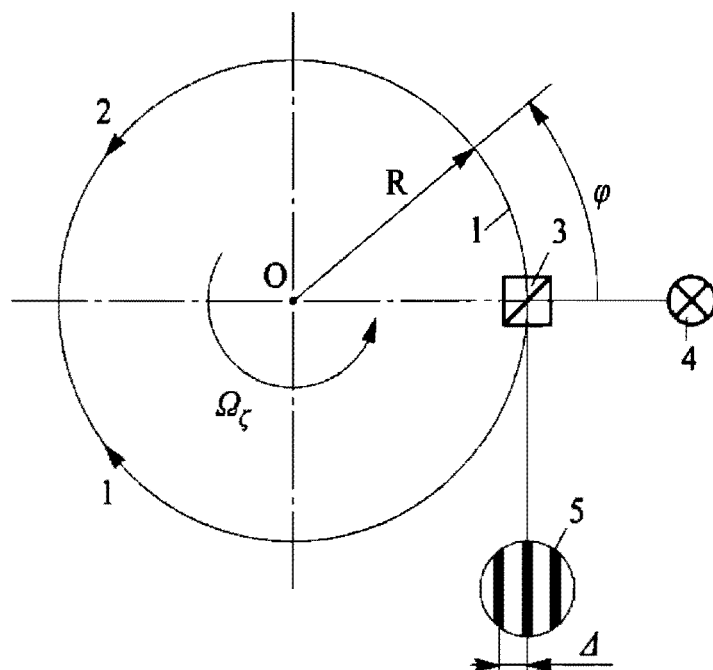


Рис. 92. Схема пассивного интерферометра



на площадке которого образуется интерференционная картина, состоящая из светлых и темных полос.

Если основание, на котором установлен оптический контур, неподвижно относительно инерциального пространства ( $\Omega_\zeta = 0$ ), то разность хода лучей  $\Delta L = L_2 - L_1 = 0$ , а  $L_2 = L_1 = 2\pi R$ , что соответствует неизменной интерференционной картине (при отсутствии потерь в световолокне, отсутствии шумов электронной схемы). Появление абсолютной угловой скорости  $\Omega_\zeta \neq 0$  приводит к тому, что путь луча 2 увеличивается на величину  $l$ , а луча 1 — уменьшается на величину  $l$ .

Разность хода лучей (за время  $t_0$  обхода лучом контура)  $\Delta L = L_2 - L_1 = 2l$  является причиной их фазового сдвига, следовательно, и линейного сдвига интерференционных полос на площадке фотоприемника, величина которого пропорциональна измеряемой угловой скорости  $\Omega_\zeta$ . Разность  $\Delta L = 2l$  хода лучей соответствует разности времени возвращения лучей в исходную точку:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta L}{c} = \frac{2l}{c},$$

где  $l = \Omega_\zeta t_0 R = \frac{2\pi R^2}{c} \Omega_\zeta = \frac{2S}{c} \Omega_\zeta$ ;  $c$  — скорость света ( $S$  — площадь оптического контура).

Фазовый сдвиг интерференционных полос

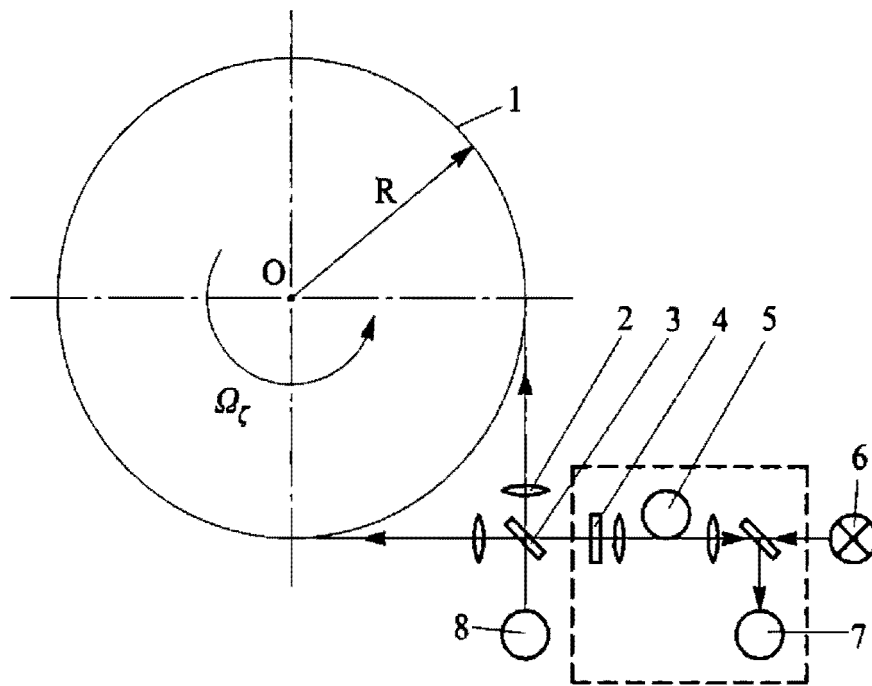
$$\Delta\varphi = \nu_0 \Delta t = \frac{4S\nu_0}{c^2} \Omega_\zeta = h\Omega_\zeta,$$

где  $h = \frac{4S\nu_0}{c^2}$  — чувствительность (масштабный коэффициент) пассивного интерферометра;  $\nu_0$  — частота излучения.

Измеряя фазовый сдвиг  $\Delta\varphi$  оптическим устройством, определяют угловую скорость  $\Omega_\zeta$  основания. Однако чувствительность  $h$  мала, поэтому необходимо увеличивать площадь контура. С увеличением возрастают энергетические потери.

Реализация ДУС на базе пассивного интерферометра стала возможной только в связи с развитием световолоконной оптики, лазерной техники и микроэлектроники; отсюда название — волоконно-оптический гироскоп (ВОГ). Точность серийных ВОГ за последние годы возросла от 10 до  $10^{-3}$  °/ч.

Погрешности ВОГ связаны с качеством световолокна, деформацией корпусных деталей, шумами электронных схем, влиянием внешних магнитных полей и т. п. Характеристики прибора во многом зависят от температуры окружающей среды, поэтому в прецизионных ВОГ применяют системы термостатирования. Влияние магнитных полей снижают с помощью экрана. На рис. 93 показана принципиальная схема ВОГ.



**Рис. 93.** Принципиальная оптическая схема ВОГ:

1 — кольцо из одномодового волокна; 2 — линза; 3 — оптический разделитель луча; 4 — поляризатор; 5 — пространственный волоконный фильтр моды; 6 — лазер; 7, 8 — фотоприемники

В прецизионных схемах ВОГ используют достижения микрооптической технологии, волоконно-оптические функциональные и оптические волновые элементы и др.

Применение фотонно-кристаллических волокон позволяет уменьшить диаметр оптического контура до 2,5 см (без потери точности), существенно снизить влияние температуры и внешних магнитных полей на характеристики ВОГ.

Модель погрешности ВОГ запишем в зависимости от температуры окружающей среды в форме (42):

$$\omega(t \text{ } ^\circ\text{C}) = \omega_0 + K_0 \frac{\Delta t \text{ } ^\circ\text{C}}{t} + K_1 t \text{ } ^\circ\text{C} + \Delta\omega_{\text{сл}},$$

где  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $\Delta\omega_{\text{сл}}$ ,  $\omega_0$  — величины, определяемые, как правило, экспериментально;  $\Delta t \text{ } ^\circ\text{C}$  — перепад температур за время  $t$ .

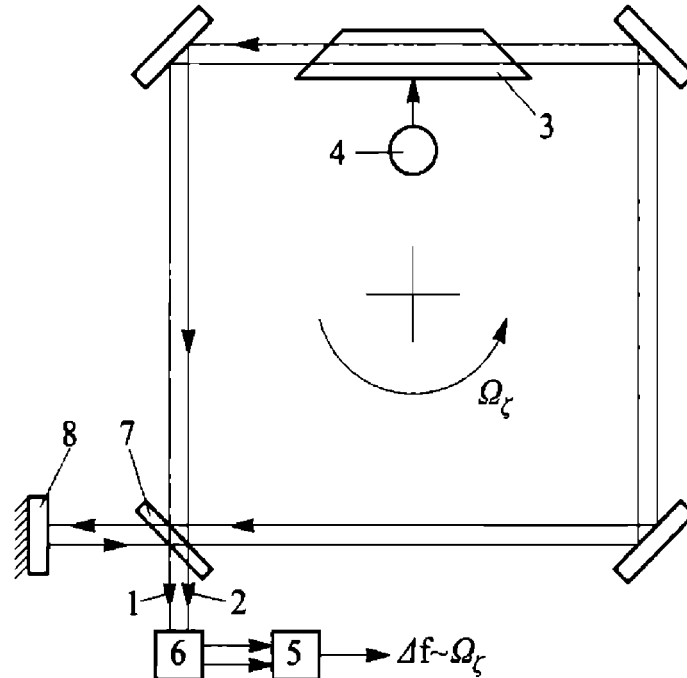
При больших линейных перегрузках  $n$  отмечена зависимость погрешности ВОГ от  $n$  (обусловленная деформацией корпуса и элементов прибора).

В настоящее время ВОГ находит широкое применение для построения бескарданных систем ориентации, БИНС, САУ беспилотных ЛА и др.

### Лазерный ДУС

Схема лазерного ДУС (ЛДУС), представляющего собой активный интерферометр — кольцевой оптический квантовый генератор, приведена на рис. 94.

Принципиальное отличие ЛДУС от ВОГ состоит в том, что активная среда лазера помещается в замкнутый контур опти-



**Рис. 94.** Схема ЛДУС:

1, 2 — лучи; 3 — лазер; 4 — блок питания лазера; 5 — частотомер; 6 — фотоприемник; 7, 8 — полупрозрачное и отражающее зеркала

ческого резонатора, представляющего собой систему зеркал или призм. При включении источника питания 4 (блок «поджига») и возбуждения активной среды в колебательной резонансной системе возникают свободные электромагнитные колебания, которые усиливаются благодаря наличию активной среды лазера и оптического резонатора.

Наиболее часто применяют гелий-неоновые лазеры. Гелий не участвует в излучении, но обеспечивает эффективное возбуждение нейтральных атомов неона. Отношение парциальных давлений He и Ne находится в диапазоне 0,073...0,2.

Возбуждение активной среды осуществляется тлеющим высоковольтным (5...10 кВ) зарядом постоянного напряжения или высокочастотным ( $10^2 \dots 10^3$  МГц) сравнительно низким напряжением. При возбуждении газа спонтанное излучение атомов получает максимальное усиление в направлении оптической оси резонатора, возвращается с помощью зеркал (или призм) резонатора в активную среду, которая обеспечивает дальнейшее усиление благодаря стимулированному излучению лазера. Усиление продолжается до тех пор, пока плотность энергии в волне не достигнет такого значения, при котором коэффициент усиления уменьшается вследствие эффекта насыщения. Система входит в автоколебательный режим работы подобно автогенератору; при этом функцию положительной обратной связи выполняют активная среда с резонатором. Установившейся генерации на частоте  $f_0$  (при  $\Omega_z = 0$ ) соответствует равенство усиления среды и суммарных потерь в резонаторе. В режиме генерации устанавливаются две встречные волны генерации (лучи 1 и 2) с частотой  $f_0 = f_{01} = f_{02}$  при  $\Omega_z = 0$ .

Необходимым условием работы ЛДУС является выполнение основного условия генерации активного интерферометра, которое означает кратность периметра  $L$  длине световой волны  $\lambda$  генерируемого излучения с частотой  $f$ :

$$L = m\lambda = mc/f, \quad (112)$$

где  $m \approx 10^5 \dots 10^6$  — целое число.

Наличие угловой скорости  $\Omega_z \neq 0$  приводит к изменению длины путей лучей  $L_2 > L_1$  (см. рис. 92), следовательно, и частот генерации  $f_1 = mc/L_1$ ,  $f_2 = mc/L_2$ . При этом разность частот  $\Delta f = f_1 - f_2$  (а не сдвиг фаз, как в ВОГ) пропорциональна измеряемой угловой скорости  $\Omega_z$ . Интерференционная картина перемещается с частотой  $\Delta f$ , и на выходе фотоприемника 6 возникает переменный ток, частота которого измеряется прибором 5 и пропорциональна  $\Omega_z$ .

Отметим, что часть излучаемой энергии ( $< 0,1\%$ ) выводится на регистрирующее устройство, состоящее из оптического смесителя (7, 8) и фотоприемника 6. Лучи смешиваются с помощью полупрозрачного 7 и отражающего 8 зеркал. Луч 2 частично проходит через зеркало 7, а луч 1, отражаясь от зеркала 8, смешивается с лучом 2, образуя интерференционную картину на фоточувствительной площадке фотоприемника 6, которая неподвижна при  $\Omega_z = 0$ .

Принцип работы ЛДУС можно пояснить следующим образом.

Две встречные бегущие электромагнитные волны (1 и 2) кольцевого лазера образуют стоячую волну, неподвижную в инерциальном пространстве. Для стоячей волны характерно наличие узлов, т. е. мест, где амплитуда колебаний равна нулю, и пучностей (ср. с ВТГ). Наблюдатель, смотря сверху на оптический контур (если бы это было возможно), фиксировал бы темные точки — узлы на светящемся кольце, неподвижном в инерциальном пространстве.

Вращение основания с абсолютной скоростью  $\Omega_z \neq 0$  приведет к перемещению узлов и пучностей волны относительно наблюдателя. Если считать, что от каждой темной точки идет импульс, то частота их следования пропорциональна  $\Omega_z$ , а суммарное число импульсов пропорционально  $\int \Omega_z(t) dt$ , т. е. углу  $\Delta\psi$  поворота основания.

При работе ЛДУС обеспечивают одномодовый режим генерации, добываясь монохроматического когерентного излучения. Для этого регулируют усиление активной среды так, что на всех модах, кроме основной, потери в резонаторе не компенсируются.

Генерация зависит от спектральных характеристик зеркал, точности изготовления оптических деталей, силы тока газового разряда и др. Так, отклонения от параллельности двух плоских зеркал ( $\approx 5'$ ) может вызвать исчезновение генерации. Равенство частот  $f_{01}$  и  $f_{02}$  генерации при  $\Omega_\zeta = 0$  обеспечивается выполнением условия строгой симметрии потерь энергии во встречных лучах 1 и 2 подбором характеристик элементов резонатора, осуществлением конструктивных и технологических мер, в частности, по стабилизации периметра  $L$  оптического контура.

Важной характеристикой ЛДУС является коэффициент добротности, который учитывает отношение энергии  $N$ , поступающей в резонатор, к потерям энергии  $N_\pi$  (за счет отражения, дифракции и т. д.):

$$Q = \omega_0 \frac{N}{N_\pi} = 2\pi f_0 \frac{N}{N_\pi}, \quad (113)$$

где  $f_0 = f_{01} = f_{02}$  — частота встречных бегущих волн генерации (лучи 1 и 2) при  $\Omega_\zeta = 0$ .

За время  $t_0$  обхода лучом оптического контура  $L$  потери энергии

$$N_\pi = \frac{\eta N}{t_0} = \frac{\eta N c}{L},$$

где  $\eta$  — коэффициент потерь энергии.

Подставив  $N_\pi$  в формулу (113), получим

$$Q = 2\pi \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{NL}{\eta N c} = 2\pi \frac{L}{\lambda \eta} = 2\pi \frac{m}{\eta},$$

где  $\lambda = 0,633$  мкм — длина волны неона.

Коэффициент  $\eta$  мал, поэтому добротность ЛДУС достаточно высокая ( $Q \approx 10^9$ ) по сравнению с ВОГ, что обеспечивает высокую чувствительность ЛДУС.

Построим выходную характеристику ЛДУС и определим чувствительность  $h$  (масштабный коэффициент). Разность частот на выходе ЛДУС при  $\Omega_\zeta \neq 0$

$$\Delta f = f_1 - f_2 = \frac{mc}{L_1} - \frac{mc}{L_2} = mc \left( \frac{1}{L-l} - \frac{1}{L+l} \right) = \frac{2lmc}{L^2 - l^2},$$

где  $2l = L_2 - L_1 = 4S\Omega_\zeta/c$ .

При  $l \ll L$

$$\Delta f \approx \frac{4Sm}{L^2} \Omega_\zeta = \frac{4S}{L\lambda} \Omega_\zeta = h\Omega_\zeta, \quad (114)$$

где  $h = \frac{4S}{L\lambda}$  — чувствительность ДУС.

Для квадратной формы контура со стороной квадрата  $a$  чувствительность  $h = \frac{a}{\lambda}$ .

Поскольку неон имеет минимальный размер волны  $\lambda$  (по сравнению с другими газами), то значение  $h$  велико (ср. с ВОГ).

На рис. 95, а показана идеальная выходная ЛДУС — прямые; видно, что съём сигнала, осуществляемый по частоте, не дает возможности определить знак угловой скорости  $\Omega_\zeta$ .

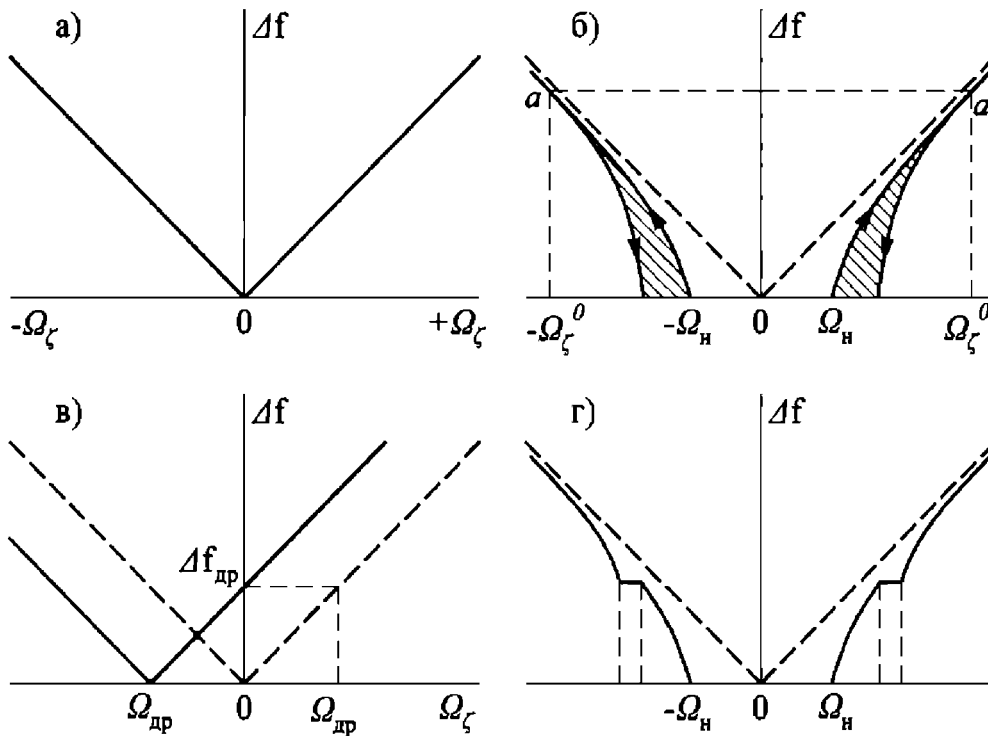
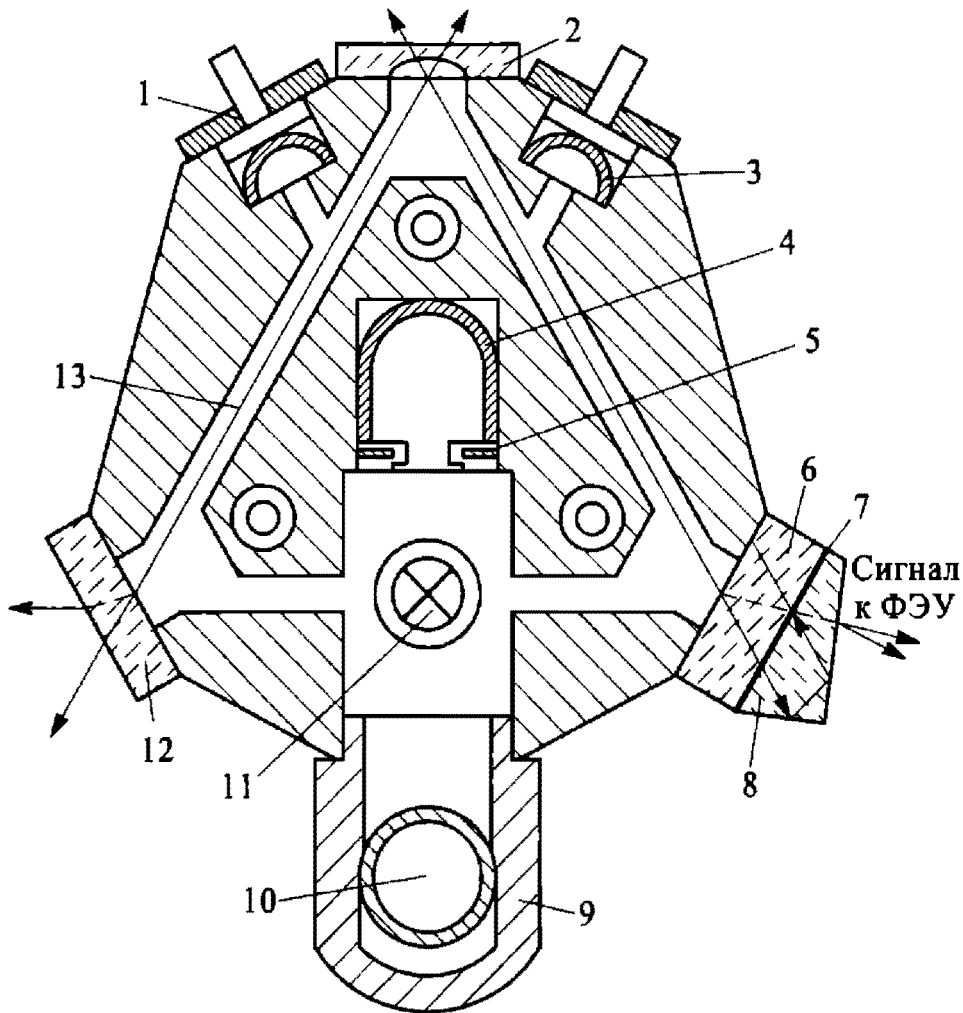


Рис. 95. Выходная характеристика ЛДУС

Для установления знака  $\Omega_\zeta$  используют два фотоприемника, смещенные друг относительно друга так, что возникает сдвиг фаз между сигналами  $0,25\varphi = 0,5\pi$ . По отставанию или опережению фаз первого и второго фотоприемника либо специальных призм (рис. 96) определяют с помощью логической схемы знак  $\Omega_\zeta$ .



**Рис. 96.** Конструктивная схема монолитного ЛДУС:

1 — гермоввод; 2 — сферическое зеркало; 3 — анод; 4 — катод; 5 — напыленный экран; 6 — зеркало, с которого снимают показания; 7 — устройство для расщепления луча; 8 — составная призма; 9 — трубка наполнения; 10 — газопоглотитель; 11 — диафрагма; 12 — плоское зеркало; 13 — канал в кварце для луча; ФЭУ — фотоэлектронный усилитель

Лазерный гироскоп может работать в режиме интегрирующего гироскопа. Если суммировать импульсы, частота следования которых пропорциональна  $\Delta f$ , то можно получить информацию об угле  $\Delta\psi$  поворота основания:

$$N_{\Sigma} = h \int_0^t \Omega_z(t) dt = h\Delta\psi,$$

где  $N_{\Sigma}$  — число импульсов за время  $t$  (при нулевых начальных условиях).



При определении выходной характеристики ЛДУС следует учитывать наличие энергетических связей между лучами, обусловленных обратным рассеиванием на элементах резонатора, оптической неоднородностью активной среды и др. Колебания при малых  $\Omega_z$  происходят с близкими частотами, поэтому благодаря энергетическим связям встречных волн частоты колебаний сближаются ( $f_2 \rightarrow f_1$ ) и возникает синхронизация, при которой  $\Delta f = 0$ , несмотря на наличие угловой скорости основания  $\Omega_z \leq \Omega_n$ ; здесь  $\Omega_n$  определяет зону ( $2\Omega_n$ ) нечувствительности ЛДУС (или зону «захвата»).

На рис. 95, б приведена фактическая выходная характеристика ЛДУС с учетом зоны гистерезиса (заштрихованная область), которая возникает вследствие неоднозначности энергетических связей волн. Гистерезис является причиной неоднозначности характеристики ЛДУС при возрастании и убывании  $\Omega_z$ .

В целях устранения влияния зон нечувствительности и гистерезиса необходимо выбирать диапазон работы прибора в зоне линейности характеристики (на рис. 95, б в районе «рабочих» точек  $a$  и  $a'$ ). Для этого следует ввести дополнительное устройство, которое обеспечивает начальную угловую скорость, намного превышающую  $\Omega_n$ , например, поставить ЛДУС на платформу поворотного стола, вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\Omega_n^0 > K_n \Omega_n$ , где  $K_n \approx 10 \dots 30$  — коэффициент запаса. Тогда характеристика ЛДУС будет ограничена линейным участком в диапазоне  $\Omega_n^0 - \Omega_{z\max}$  и  $\Omega_n^0 + \Omega_{z\max}$ . Применение постоянного вращения позволяет определить знак  $\Omega_z$  без дополнительных устройств.

Однако этот способ требует дорогостоящего прецизионного поворотного стола, увеличивает габариты системы. Поэтому он нашел ограниченное применение (например, использование одного поворотного стола для блока трех ЛДУС морской системы навигации).

Наиболее распространена так называемая частотная подставка, осуществляющая колебания корпуса прибора, как правило, по гармоническому закону  $\psi = \psi_n \sin v_n t$ . При этом параметры колебаний подставки выбирают таким образом, что-

бы время прохождения зоны нечувствительности было мало. Тогда можно считать, что рабочая точка характеристики  $a$  мгновенно переходит в точку  $a'$  при смене знака ( $v_{\text{п}}\psi_{\text{п}} > \Omega_{\zeta\text{max}} + K_{\text{н}}\Omega_{\text{н}}$ ). Подставка реализуется с помощью упругой подвески корпуса ЛДУС, которому с помощью электромагнитного возбудителя сообщают колебания заданной частоты; частоту  $\nu_{\text{п}}$  целесообразно выбирать равной частоте собственных угловых колебаний корпуса на упругом подвесе.

Преимуществом такой электромеханической подставки является простота конструкции наряду с возможностью получения высоких точностных характеристик. Применяют также магнитно-оптические подставки на магнитно-оптических невзаимных элементах, использующих ячейки Фарадея, невзаимные элементы, основанные на эффекте Френеля—Физо и др. [2]. Эффективная разность хода лучей обеспечивается за счет различных параметров среды при прохождении лучей в одну и другую стороны. Так, лучи света, поляризованные по кругу и помещенные в постоянное магнитное поле, имеют различные коэффициенты преломления (эффект Фарадея), что и вызывает их частотное смещение. Однако в связи с конструктивными и технологическими проблемами такие подставки не нашли широкого применения.

Наличие нулевого сигнала ЛДУС приводит к сдвигу его характеристик влево или вправо (рис. 95, в). Величину  $\Omega_{\text{др}} = \Delta f_{\text{др}}/h$  называют скоростью дрейфа нуля. С учетом  $\Omega_{\text{др}}$  характеристика (114) имеет вид

$$\Delta f = h(\Omega_{\zeta} + \Omega_{\text{др}}) = h\Omega_{\zeta} + h\Omega_{\text{др}}.$$

Причинами возникновения дрейфа ( $\Delta f_{\text{др}} \neq 0$  при  $\Omega_{\zeta} = 0$ ) являются неодинаковые условия прохождения лучей 1 и 2 в результате невзаимного изменения коэффициентов преломления среды (эффект Френеля—Физо и др.). Изменение длины периметра (даже на  $0,01\lambda$ ) вследствие изменения температуры окружающей среды, нагрева корпуса газом, деформации приводит к значительному повышению  $\Omega_{\text{др}}$ . При изготовлении корпуса используют материалы с малым коэффициентом линейного расширения (ситалл, кервит, кварц). Однако

без принятия специальных мер нестабильность периметра  $L$ , например, призматического резонатора достигает  $(10 \dots 100)\lambda$ . Поэтому предусматривают активную стабилизацию периметра с помощью системы автоматического регулирования, управляющий сигнал которой определяется в соответствии с характерными точками кривой усиления активной среды и подается на устройство перемещения одного из зеркал (призм) резонатора.

Причиной появлений магнитного поля ЛДУС, создающего неодинаковые условия прохождения лучей 1 и 2, служат элементы частотной подставки, блока питания, внешние источники магнитного поля. Чувствительность к магнитным полям оценивается до значения  $0,1 \dots 1,0$  Гц/Э ( $1 \text{ Э} = 79,5775 \text{ А/м}$ ).

Для уменьшения влияния внешнего магнитного поля ЛДУС экранируют. Скорость дрейфа нуля определяют в зависимости от времени работы прибора в одном запуске (включении), от запуска к запуску. Стабильность скорости дрейфа нуля ЛДУС в запуске составляет  $10^{-4} \dots 10^{-1} \text{ }^\circ/\text{ч}$ .

Погрешность ЛДУС также определяется нестабильностью  $\Delta h$  масштабного коэффициента  $h$  и зависит от изменения периметра, нестабильности коэффициента преломления активной среды и др.

Значение  $h$  устанавливают экспериментально для конкретного прибора путем сравнения фиксированного угла поворота корпуса с числом импульсов его выходного сигнала; при  $h = 1,6 \dots 3,3 \text{ }''/\text{имп.}$  нестабильность  $\Delta h$  достигает  $10^{-6} \dots 10^{-4}$ .

Выходная характеристика ЛДУС зависит от условий эксплуатации: угловых колебаний, вибрации, изменения магнитного поля, температуры и т. д.

При совпадении частоты биений с частотами внешних возмущений возникают зоны параметрического резонанса и у характеристики  $\Delta f(\Omega_z)$  появляются так называемые зоны нечувствительности в некотором диапазоне  $\Omega_z$  (т. е. при изменении  $\Omega_z$   $\Delta f = \text{const}$ ), или «полочки синхронизации» (рис. 95, з). Для уменьшения зон синхронизации можно приме-

нять колебания подставки, например, по закону  $\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}_1 \cos v_1 t + \dot{\psi}_2 \cos v_2 t$ . Чтобы снизить влияние вибрации, конструкцию прибора делают жесткой; иногда применяют специальную систему амортизации.

При приближенной оценке модели погрешности (скорости дрейфа) ЛДУС воспользуемся зависимостью [2] (без учета угловой скорости подставки)

$$\Delta f = h \sqrt{\Omega_{\zeta}^2 - \Omega_{\text{н}}^2},$$

где  $\Omega_{\text{н}}$  — половина зоны ( $2\Omega_{\text{н}}$ ) нечувствительности.

Введя обозначение  $\rho = \frac{\Omega_{\text{н}}}{\Omega_{\zeta}} \ll 1$ , получим

$$\Delta f \approx h\Omega_{\zeta}(1 - 0,5\rho^2).$$

При учете  $\Omega_{\text{др}} \neq 0$   $\rho = \frac{\Omega_{\text{н}}}{\Omega_{\zeta} + \Omega_{\text{др}}}$ . Тогда

$$\Delta f \approx h(\Omega_{\zeta} + \Omega_{\text{др}})(1 - 0,5\rho^2).$$

При малой нестабильности масштабного коэффициента ( $\Delta h \ll h$ ) и угловой скорости частотной подставки  $\Delta\Omega_{\text{п}}$

$$\Delta f \approx h(\Omega_{\zeta} + \Omega_{\text{др}})(1 - 0,5\rho^2) + \Delta h(\Omega_{\zeta} + \Omega_{\text{др}}) + (h + \Delta h)\Delta\Omega_{\text{п}}.$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$\Delta f \approx h\Omega_{\zeta} + \Delta h\Omega_{\zeta} + h\Omega_{\text{др}} - 0,5\rho\Omega_{\text{н}} + \Delta h\Omega_{\text{п}}.$$

Модель погрешности ЛДУС запишем в традиционной форме ССП гироскопа:

$$\Delta\Omega_{\zeta} = \Omega_0 + \Omega_{\text{др}} + \Omega'_{\text{н}} + \Delta\Omega_{\text{п}}, \quad (115)$$

где  $\Omega_0 = (\Delta h/h)\Omega_{\zeta}$  — составляющая погрешности, вызванная нестабильностью масштабного коэффициента;  $\Omega'_{\text{н}} = |0,5\rho\Omega_{\text{н}}|$  — составляющая погрешности, определяемая размером зоны захвата.

Модель (115) может быть использована для приближенной оценки точности ЛДУС. На рис. 96 приведена конструктивная схема ЛДУС, выполненного из монокристаллического кварца.

## 12. МИКРОМЕХАНИЧЕСКИЙ ГИРОСКОП РАМОЧНОГО ТИПА

---

Во введении рассмотрен принцип измерения угловой скорости и линейного ускорения с помощью микромеханического гироскопа рамочного типа. Конструкция МГР (см. рис. 24) построена на базе кремниевой технологии. В качестве датчика момента используется «гребенчатый привод», датчик угла — емкостного типа [1].

Найдем более точные аналитические соотношения МГР, поясняющие его работу в режиме ДУС.

Выберем СК  $O\xi\eta\zeta$ , связанную с корпусом; СК  $Ox_1y_1z_1$  связана с наружной рамкой карданова подвеса, СК  $Oxyz$  — с внутренней рамкой (рис. 97). Углы  $\alpha$ ,  $\beta$  поворота наружной и внутренней рамок относительно корпуса считаем малыми.

Проекции абсолютных угловых скоростей на оси СК  $Oxyz$ :

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \dot{\beta} + \Omega_\xi \cos \alpha - \Omega_\zeta \sin \alpha; \\ \Omega_y &= (\dot{\alpha} + \Omega_\eta) \cos \beta + \sin \beta (\Omega_\zeta \cos \alpha + \Omega_\xi \sin \alpha); \\ \Omega_z &= (\Omega_\zeta \cos \alpha + \Omega_\xi \sin \alpha) \cos \beta - (\dot{\alpha} + \Omega_\eta) \sin \beta.\end{aligned}$$

При малых  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\Omega_\zeta = \Omega$ ,  $\Omega_\eta = \Omega_\xi = 0$

$$\Omega_x \approx \dot{\beta} - \Omega\alpha; \quad \Omega_y \approx \dot{\alpha} + \Omega\beta; \quad \Omega_z \approx \Omega - \dot{\alpha}\beta \approx \Omega.$$

Для составления уравнений движения внутренней рамки (наружную рамку считаем невесомой) воспользуемся теоремой Резаля (в методических целях). Для твердого тела, имеющего неподвижную точку, линейная скорость  $\vec{V}_q$  конца вектора момента количества движения  $\vec{Q}$  (кинетического момента тела) равна моменту внешних сил  $\vec{M}$ :  $\vec{V}_q = \vec{M}$ . Скорость  $\vec{V}_q = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ , где  $\vec{V}_r$  — относительная скорость (локальная про-

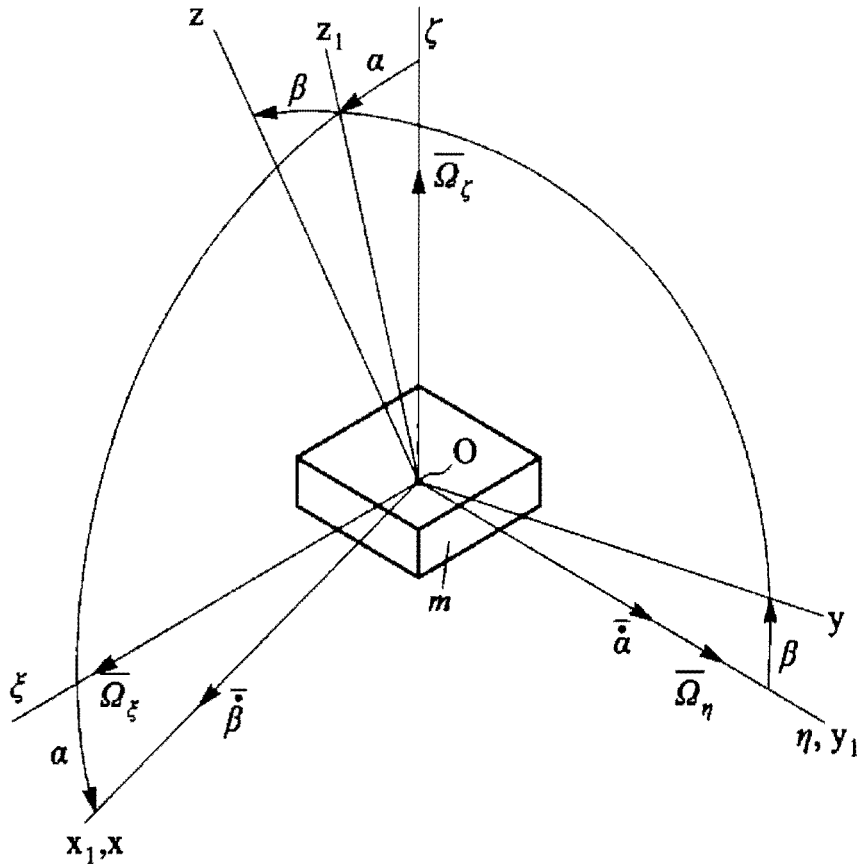
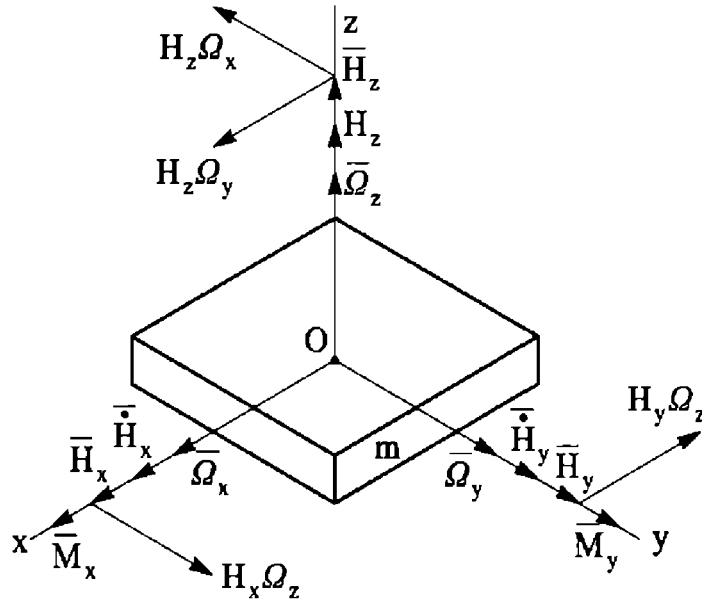


Рис. 97. К составлению уравнений движения массы  $m$

изводная вектора  $Q$ );  $\bar{V}_e$  — составляющая скорости  $\bar{V}_q$ , обусловленная переносным вращением. Поясним теорему Резаля с помощью рис. 98.

Определим проекции момента количества движения внутренней рамки (массой  $m$ ) на оси СК  $Oxyz$  (главные центральные оси инерции):  $\bar{H}_x = A\bar{\Omega}_x$ ,  $\bar{H}_y = B\bar{\Omega}_y$ ,  $\bar{H}_z = C\bar{\Omega}_z$ , где  $A, B, C$  — моменты инерции твердого тела относительно осей  $Ox, Oy, Oz$ . Пусть вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$  карданова подвеса действуют внешние моменты  $M_x$  и  $M_y$ .

Спроецируем составляющие линейных скоростей концов векторов  $\bar{H}_x, \bar{H}_y, \bar{H}_z$  на оси  $Ox$  и  $Oy$ , учитывая локальные производные векторов  $\dot{H}_x = A\dot{\Omega}_x$ ,  $\dot{H}_y = B\dot{\Omega}_y$  и вращение векторов с абсолютными угловыми скоростями  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ . Линейные скорости концов векторов  $\bar{H}_x, \bar{H}_y, \bar{H}_z$  показаны на рис. 98.



**Рис. 98.** Иллюстрация применения теоремы Резаля при составлении уравнений движения массы  $m$

Конструкцию торсионов и рам считаем жесткой, поэтому вокруг оси  $Oz$  движение массы  $m$  отсутствует. Тогда для осей  $Ox$  и  $Oy$

$$\begin{aligned} \dot{H}_x + H_z \Omega_y - H_y \Omega_z &= M_x; \\ \dot{H}_y + H_x \Omega_z - H_z \Omega_x &= M_y. \end{aligned}$$

После преобразования получим известные уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} A\dot{\Omega}_x + (C - B)\Omega_z\Omega_y &= M_x; \\ B\dot{\Omega}_y - (C - A)\Omega_z\Omega_x &= M_y. \end{aligned} \tag{116}$$

Моменты внешних сил запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_x &= -K_\beta\beta - K_{\beta\alpha}\alpha - D_\beta\dot{\beta} + M_x^{\text{упр}} + M_x^{\text{вп}}; \\ M_y &\approx M_{y1} = -K_\alpha\alpha - K_{\alpha\beta}\beta - D_\alpha\dot{\alpha} + M_{y1}^{\text{упр}} + M_x^{\text{вп}}, \end{aligned}$$

где  $K_\beta, K_\alpha$  — приведенные угловые жесткости торсионов;  $D_\alpha, D_\beta$  — приведенные коэффициенты демпфирования;  $K_{\beta\alpha}, K_{\alpha\beta}$  — приведенные «перекрестные» угловые жесткости торсионов при наличии технологических погрешностей и прогибов торсионов;  $M_x^{\text{вп}}, M_{y1}^{\text{вп}}$  — вредные (возмущающие) моменты: моменты разбалансировки, неравножесткости, моменты,

вызванные влиянием магнитных полей, газодинамики и т. д.;  $M_x^{\text{упр}}, M_{y_1}^{\text{упр}}$  — моменты управления (в частности, момент  $M_x^{\text{упр}} = M = M_0 \sin \omega t$ , обеспечивающий колебания рамки 1), моменты обратных связей (тогда предусматриваются датчики угла и момента по осям  $Ox$  и  $Oy_1$  соответственно в целях повышения точности прибора).

Приближенно запишем:

$$\begin{aligned} M_x &= -K_\beta \beta - D_\beta \dot{\beta} + M_0 \sin \omega t; \\ M_{y_1} &= -K_\alpha \alpha - D_\alpha \dot{\alpha}. \\ \dot{\Omega}_x &= \ddot{\beta} - \dot{\alpha} \Omega; \quad \dot{\Omega}_y = \ddot{\alpha} + \dot{\beta} \Omega; \\ \Omega_z \Omega_y &= \Omega \dot{\alpha} + \Omega^2 \beta; \quad \Omega_z \Omega_x = \Omega \dot{\beta} - \Omega^2 \alpha. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в уравнения (116):

$$\begin{aligned} A\ddot{\beta} + D_\beta \dot{\beta} + [K_\beta + (C - B)\Omega^2]\beta &= \\ &= (A + B - C)\dot{\alpha} \Omega + M_0 \sin \omega t; \end{aligned} \quad (117)$$

$$B\ddot{\alpha} + D_\alpha \dot{\alpha} + [K_\alpha + (C - A)\Omega^2]\alpha = -(A + B - C)\dot{\beta} \Omega.$$

Рассмотрим свободное движение рамки при  $D_\alpha = D_\beta = 0$ ,  $K_\alpha = K_\beta = K$ ,  $B = A$ ,  $\chi = 2A - C$ ,  $M_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} A\ddot{\beta} + [K + (C - A)\Omega^2]\beta - \chi \Omega \dot{\alpha} &= 0; \\ A\ddot{\alpha} + [K + (C - A)\Omega^2]\alpha + \chi \Omega \dot{\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (118)$$

Введем обозначение  $\rho = \frac{\chi}{2A} = \frac{2A - C}{2A}$  и воспользуемся понятием модифицированной частоты  $\nu_0$  колебаний:  $\nu_0 = \sqrt{\omega_0^2 + (\rho - 1)^2 \Omega^2}$ ; здесь  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{A}}$  — собственная частота незатухающих колебаний. Тогда уравнения (118) принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + (\nu_0^2 - \rho^2 \Omega^2)\beta - 2\rho \Omega \dot{\alpha} &= 0; \\ \ddot{\alpha} + (\nu_0^2 - \rho^2 \Omega^2)\alpha + 2\rho \Omega \dot{\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (119)$$

Выражения (119) имеют структуру уравнений движения маятника Фуко (как и уравнения волнового твердотельного гироскопа и других) и служат для анализа динамических погрешностей МГР.

Существует система координат, относительно которой траектория колебаний апекса гироскопа на картинной плос-



кости представляет собой эллипс. Плоскость колебаний не остается неподвижной в инерциальном пространстве, а «увлекается» основанием с угловой скоростью  $(1 - \rho\Omega)$ . Наиболее полно уравнения движения маятника Фуко исследованы в работах В.Ф. Журавлева.

Принцип измерения угловой скорости  $\Omega$  основания с помощью МГР проанализируем при грубых допущениях, считая, что в установившемся движении упругие моменты торсионов полностью (за целое число колебаний рамки) уравновешиваются гироскопическими. Пусть  $K_\alpha = K_\beta = K$ ,  $C = A = B$ ,  $M_0 \gg H_y\Omega$  ( $H_y = B\dot{\alpha}$ ,  $H_x = B\dot{\beta}$ ). Из первого уравнения (117) следует, что  $K\beta = M_0 \sin \omega t$ . Тогда  $\beta = \beta_0 \sin \omega t$ ,  $\dot{\beta} = \beta_0 \omega \cos \omega t$ , где  $\beta_0 = M_0 K^{-1}$ . Подставим  $\dot{\beta}$  во второе уравнение (117):

$$K|\alpha| = B\dot{\beta}\Omega = H_x\Omega = B\beta_0\omega\Omega \cos \omega t.$$

Выходное напряжение ДУ

$$U_{\text{вых}} = K_{\text{ДУ}}K^{-1}B\beta_0\omega\Omega \cos \omega t,$$

т. е. совпадает с выражением (30), поясняющим принцип измерения МГР.

Рассмотрим уравнения движения МГР вокруг выходной оси  $Oy_1$ , считая  $\dot{\beta} = \beta_0\omega \cos \omega t$ ,  $B_0 = B + B_1$ , где  $B_1$  — момент инерции наружной рамки относительно оси  $Oy_1$ . Из (117) следует

$$\ddot{\alpha} + 2\xi\omega_0\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = -N\Omega \cos \omega t, \quad (120)$$

где  $\xi = \frac{D_\alpha}{2B_0\omega_0}$ ;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_\alpha + (C-A)\Omega^2}{B_0}}$ ;  $N = (A + B - C)B_0^{-1}\beta_0\omega$ .

Решение уравнения (120) найдем в виде

$$\alpha = -\lambda \frac{N}{\omega_0^2} \Omega \cos(\omega t - \chi).$$

Для резонансной настройки при  $\omega = \omega_0$  коэффициент динамичности  $\lambda = \frac{1}{2\xi}$  и сдвиг по фазе  $\chi = \frac{\pi}{2}$ . Тогда

$$\alpha = \frac{N}{2\xi\omega_0^2} \Omega \sin \omega_0 t = \frac{(A + B - C)\beta_0}{D_\alpha} \Omega \sin \omega_0 t.$$

Постоянная составляющая выходного напряжения после преобразования

$$U_{\text{вых}}^* = K_{\text{ду}}K_{\text{пр}}\beta_0 \frac{A + B - C}{2D_\alpha} \Omega = h\Omega,$$

где  $h = 0,5K_{\text{ду}}K_{\text{пр}}\beta_0(A + B - C)D_\alpha^{-1}$  — чувствительность МГР, которая во многом зависит от приведенного коэффициента демпфирования  $D_\alpha$  ( $K_{\text{пр}}$  — коэффициент преобразователя).

## 13. ГИРОСТАБИЛИЗАТОРЫ

Для стабилизации объекта при действии на него возмущений (внешних моментов) вокруг одной оси, на плоскости или в пространстве применяют гироскопические стабилизаторы.

### Одноосный гиростабилизатор

Рассмотрим возможность использования свободного гироскопа (СГ) в качестве стабилизатора объекта относительно одной оси  $Oy_1$  (рис. 99). При действии на объект возмущающего

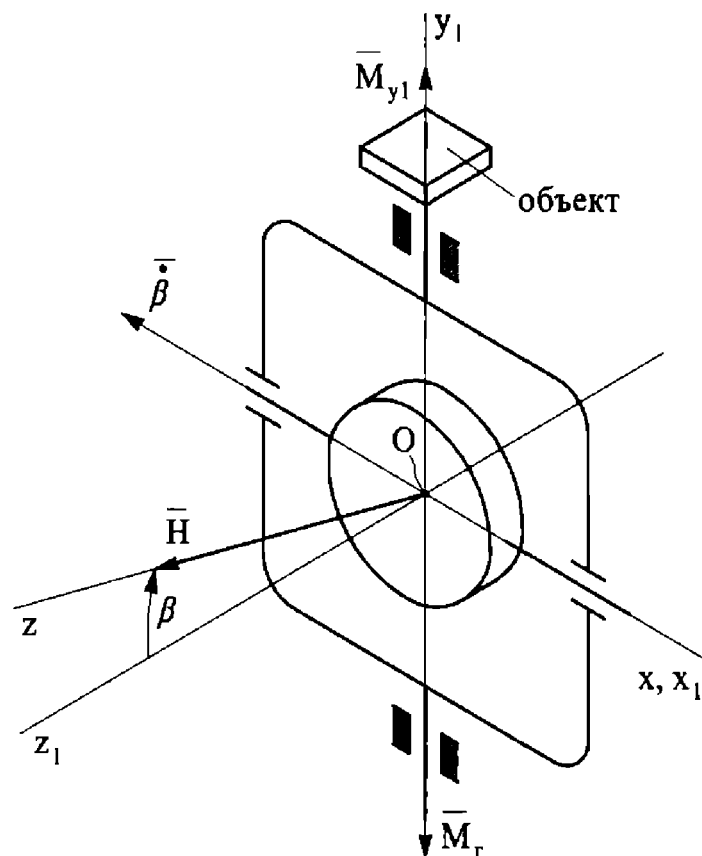


Рис. 99. Схема СГ в режиме одноосного гиростабилизатора

момента  $M_{y_1}$  гироскоп прецессирует (нутационным броском пренебрегаем) вокруг оси  $Ox$  внутренней рамки:  $\dot{\beta} = \frac{M_{y_1}}{H \cos \beta}$ . По оси  $Oy_1$  устанавливается динамическое равновесие гироскопического и внешнего моментов:

$$M_r = H \dot{\beta} \cos \beta = M_{y_1}.$$

При увеличении угла  $\beta$  скорость прецессии возрастает; при  $\beta = \frac{\pi}{2}$  гироскоп теряет степень свободы, т. е. СГ лишь весьма кратковременно обеспечивает стабилизацию объекта. Поэтому в начале XX в. была предложена схема одноосного силового гиросtabilизатора (ГС) на базе свободного гироскопа (рис. 100), который управляется системой разгрузки. Основные элементы системы разгрузки ГС: датчик угла  $ДУ_\beta$  (чувствительный элемент), усилитель  $У$ , двигатель разгрузки  $ДР$  (исполнительный элемент).

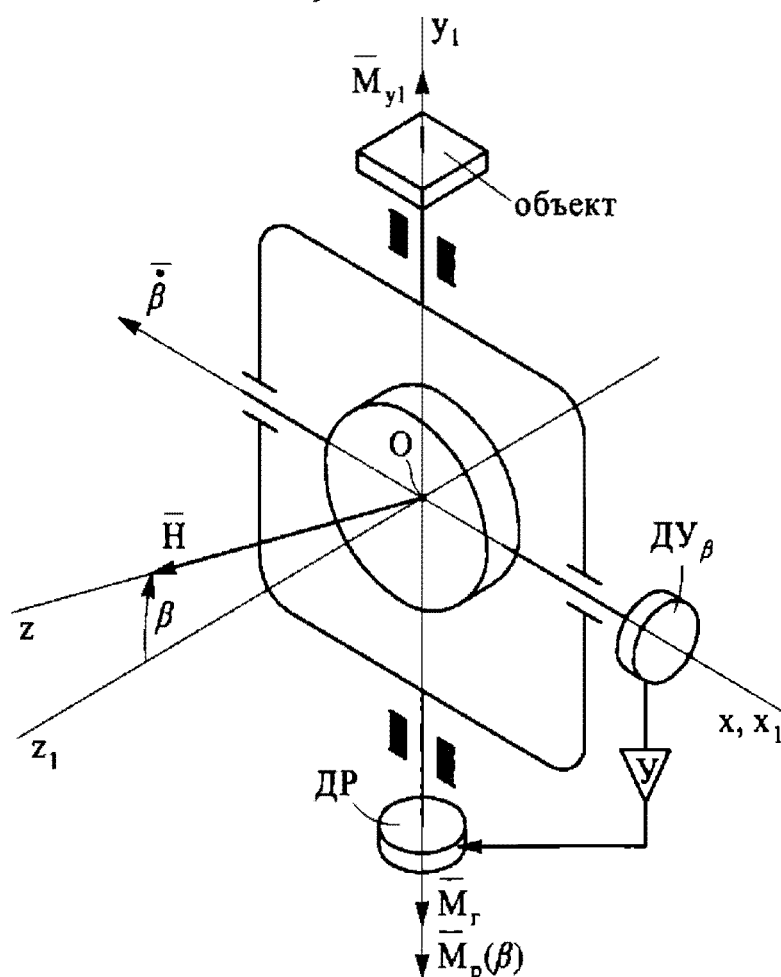


Рис. 100. Схема одноосного силового ГС

Первые системы разгрузки проектировались с редукторным приводом, в 1990-х годах стали широко применять безредукторные двигатели. Двигатели разгрузки работают в заторможенном режиме. Рассмотрим принцип работы ГС.

При действии  $\bar{M}_{y1}$  возникает прецессия гироскопа и в начальный момент гироскопический момент  $M_r$  полностью уравнивает внешний момент (I этап стабилизации):  $H\dot{\beta} \cos \beta = M_{y1}$ ;  $H\dot{\beta} \approx M_{y1}$ .

При появлении угла  $\beta$  сигнал с ДУ $_{\beta}$  через усилитель поступает на ДР (датчик момента), который развивает момент разгрузки  $M_p(\beta)$ , направленный противоположно  $M_{y1}$  (II этап стабилизации):  $H\dot{\beta} \cos \beta + M_p(\beta) = M_{y1}$ .

Для пропорциональной характеристики разгрузки  $M_p(\beta) = K_p\beta$ , где  $K_p$  — коэффициент разгрузки (коэффициент усиления, или крутизна характеристики канала разгрузки). Тогда

$$H\dot{\beta} \cos \beta + K_p\beta = M_{y1};$$

$$\dot{\beta} = \frac{M_{y1} - K_p\beta}{H \cos \beta}.$$

Скорость прецессии  $\dot{\beta}$  гироскопа уменьшается. При  $M_{y1} = K_p\beta_*$   $\dot{\beta} = 0$  и внешний момент полностью уравновешен моментом разгрузки (III этап стабилизации) «ценой» отклонения гироскопа на угол  $\beta_* = \frac{M_{y1}}{K_p}$ , а угол  $\alpha = 0$ ; стабилизация объекта осуществлена.

В подавлении внешнего момента  $M_{y1}$  принимает участие гироскопический момент, поэтому такие ГС называют силовыми ГС (СГС) в отличие от индикаторных (рис. 101) или индикаторно-силовых (см. рис. 65, б). При наличии вредных моментов  $\bar{M}_x$  точность стабилизации во многом определяется величиной  $\omega_{ССП} = \frac{M_x}{H}$ , т. е.  $\Delta\alpha = \omega_{ССП}t$ .

В индикаторном ГС (см. рис. 101) гироскоп является индикатором положения объекта. Отметим, что гироскоп может быть установлен и на самом объекте в отличие от рис 101.

При отсутствии внешнего момента  $M$  суммарный выходной сигнал с датчиков ДУ $_{\alpha}$  гироскопа и ДУ $_{\theta}$  объекта равны нулю.

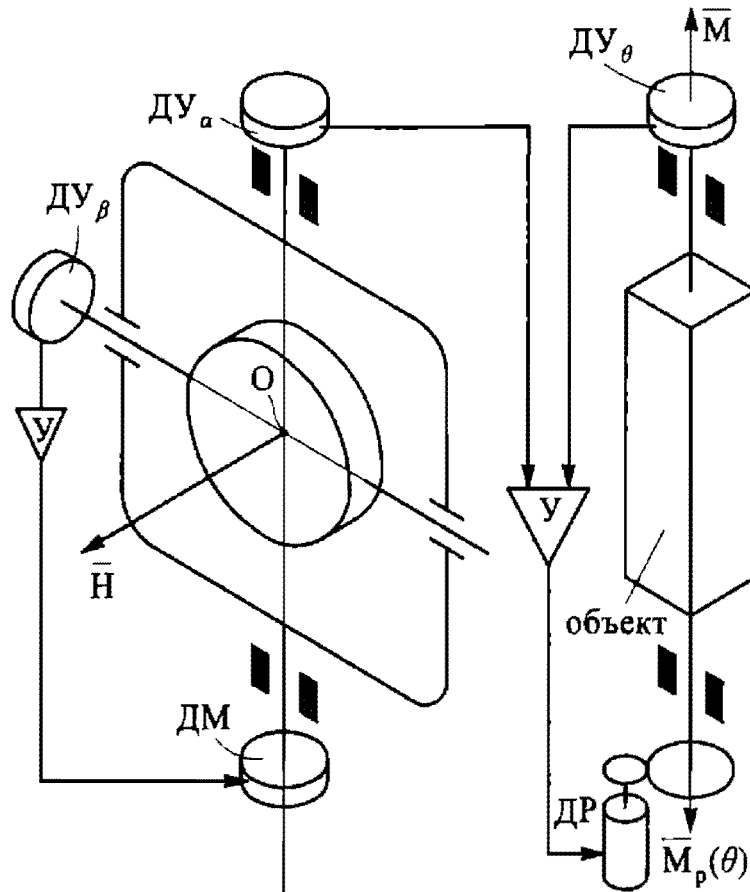


Рис. 101. Схема одноосного индикаторного ГС

При появлении момента ( $M \neq 0$ ) объект отклоняется на угол  $\theta$ , следовательно, появляется разностный сигнал  $ДУ_\alpha - ДУ_\theta$ , который усиливается и подается на ДР, развивающий момент  $M_p(\theta)$  и уравновешивающий внешний момент  $M$ ; стабилизация объекта реализовалась.

Для пропорциональной характеристики системы разгрузки  $M_p(\theta) = K_p \theta$  получим

$$K_p \theta_* = M; \quad \theta_* = \frac{M}{K_p},$$

т. е. в индикаторных ГС имеется погрешность стабилизации, которая зависит от внешнего момента  $M$ , действующего на объект. Увеличение  $K_p$  может привести к потере устойчивости системы. Это была одна из главных причин широкого применения СГС. С развитием методов проектирования систем автоматического регулирования (САР), микроэлектро-

ники и созданием малогабаритных гироскопов тенденция применения индикаторных ГС (ИГС) резко изменилась, и ИГС получили в настоящее время широкое распространение.

При наличии вредных моментов  $M_x$  гироскопа появляется дополнительная погрешность ИГС:

$$\theta_{\text{ССП}} = \frac{M_x}{H} t = \omega_{\text{ССП}} t.$$

Суммарная погрешность ИГС

$$\Delta\theta = \theta_* + \theta_{\text{ССП}} = \frac{M}{K_p} + \omega_{\text{ССП}} t.$$

Если  $M = \text{const}$ , то методами САР погрешность  $\theta_*$  можно устранить. На рис. 65, б приведена схема стабилизации платформы одноосного ГС, на котором установлен ПИГ. По принципу действия такой ГС аналогичен СГС, однако I и II этапы стабилизации практически отсутствуют, поскольку гироскопический момент  $H\dot{\beta}$  мал и не участвует в разгрузке:

$$K_p \beta \approx M_{y1}.$$

Тем не менее такие ГС называют индикаторно-силовыми ГС в отличие от «чисто» индикаторных ГС. Хотя принцип работы такого ГС можно трактовать как работу ИГС. Выходной сигнал ИГ пропорционален углу поворота платформы  $\Delta\alpha$ , следовательно, система разгрузки развивает момент  $K'_p \Delta\alpha = M_{y1}$ ; здесь в  $K'_p$  учтено передаточное отношение  $i$  ПИГ ( $K'_p = iK_p$ ). Погрешность стабилизации платформы определяется формулой (79).

В качестве чувствительных элементов ИГС применяют также ДУС (поплавковые, лазерные, волоконно-оптические микромеханические гироскопы и др.), ДНГ, сферические гироскопы, поплавковые трехстепенные гироскопы и пр. Модель погрешности ГС во многом определяется моделью погрешности ЧЭ (гироблок, ИГ, ДУС и т. д.).

Для анализа устойчивости СГС (рис. 102) необходимо рассмотреть полные уравнения ГС (с учетом моментов инерции  $-A_0\dot{\omega}_x$ ,  $-B_0\dot{\omega}_{y1}$ ). Выберем системы координат:  $O\xi\eta\zeta$  — неподвижная СК;  $Ox_1y_1z_1$ ,  $Oxyz$  — СК, связанные с наружной и внутренней рамками гироскопа. Проекция абсолютной угловой скорости на оси СК  $Oxyz$ :

$$\omega_x = -\dot{\beta}; \quad \omega_y = \dot{\alpha} \cos \beta \approx \dot{\alpha} = \omega_{y1}.$$

Уравнения движения ГС (с учетом момента демпфирования  $D\dot{\alpha}$ ):

$$\begin{aligned} -A_0 \dot{\omega}_x - H \omega_y + M_x &= 0; \\ -B_0 \dot{\omega}_{y1} + H \cos \beta \omega_x - K_p \beta - D \dot{\alpha} + M_{y1} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $A_0, B_0$  — приведенные моменты инерции ГС относительно осей  $Ox$  и  $Oy_1$ .

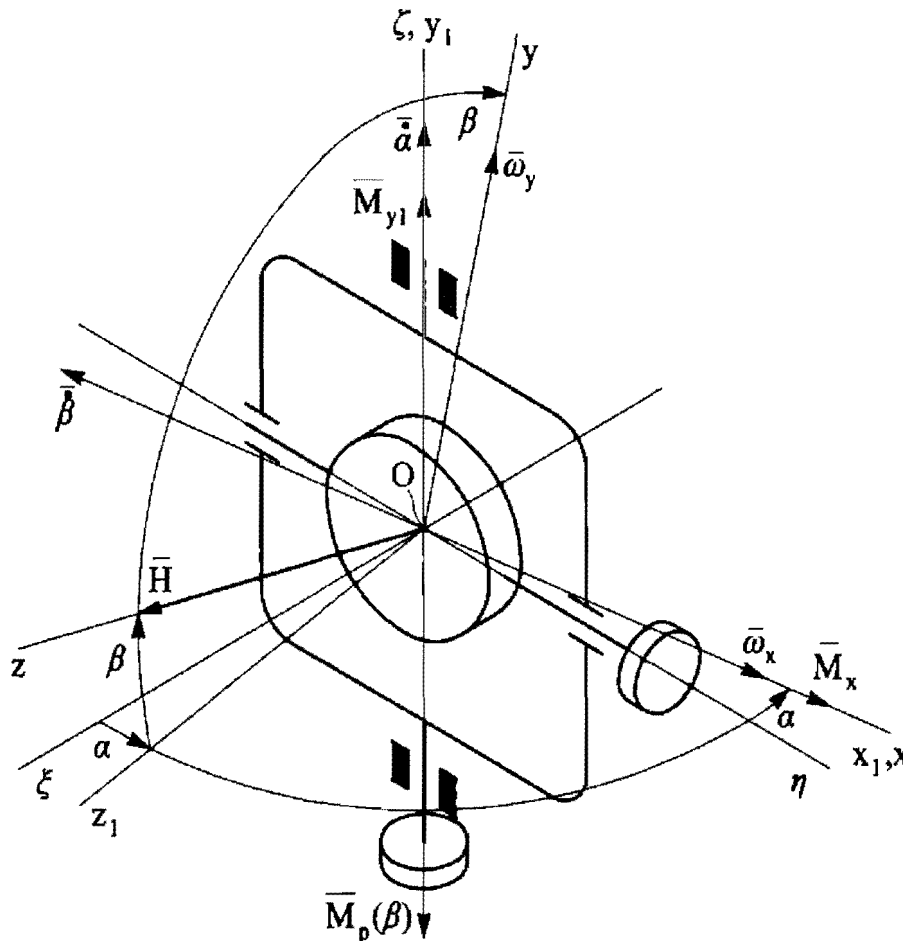


Рис. 102. К выводу уравнений одноосного СГС

При малых  $\beta$

$$\begin{aligned} A_0 \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} &= -M_x; \\ B_0 \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} + K_p \beta + D \dot{\alpha} &= M_{y1}. \end{aligned}$$

Найдем характеристическое уравнение системы, раскрывая определитель ( $\ddot{\alpha} = s^2 \alpha$ ,  $\dot{\alpha} = s \alpha$ ,  $\ddot{\beta} = s^2 \beta$ ,  $\dot{\beta} = s \beta$ ):



$$\Delta = \begin{vmatrix} A_0 s^2 & -Hs \\ Hs + K_p & B_0 s^2 + Ds \end{vmatrix} = A_0 B_0 s^4 + A_0 D s^3 + H^2 s^2 + H K_p s = 0.$$

Характеристическое уравнение запишем в виде

$$A_0 B_0 s^3 + A_0 D s^2 + H^2 s + H K_p = 0.$$

Коэффициенты уравнения положительные ( $a_i > 0$ ,  $i = 1 \dots 4$ ); это отвечает критерию устойчивости Рауса—Гурвица, которое дополняется необходимым условием для системы третьего порядка [2]:

$$a_2 a_3 > a_1 a_4;$$

$$A_0 D \cdot H^2 > A_0 B_0 H K_p.$$

Для обеспечения устойчивой работы СГС необходимо демпфирование в канале разгрузки:

$$D > \frac{B_0 K_p}{H}. \quad (120)$$

Отсюда ограничения коэффициента разгрузки (коэффициента усиления):

$$K_p < \frac{HD}{B_0}.$$

Демпфирование обеспечивается противоЭДС двигателя, введением в канал разгрузки корректирующих RC-цепочек, применением тахогенераторов и т. д. Современные методы САР позволяют получать большие коэффициенты усиления ( $> 10^6$ ) при заданном демпфировании.

### Двухосный гиросtabilизатор

Стабилизация в плоскости осуществляется двухосным ГС. Приведем схему двухосного СГС, корректируемого по вертикали (рис. 103).

Рассмотрим работу каналов разгрузки 1 и 2, считая  $K_{p1} = K_{p2} = K_p$ . При действии  $M_1$  возникает прецессия  $\dot{\rho}$  гироскопа  $H_1$ . Далее запишем для этапов стабилизации I—III:

$$H \dot{\rho} \cos \rho = M_1 \quad (I);$$

$$H\dot{\rho} \cos \rho + K_p \rho = M_1 \quad (\text{II});$$

$$K_p \rho_* = M_1; \quad \rho_* = \frac{M_1}{K_p} \quad (\text{III}).$$

Аналогичное статическое решение получается для второго канала разгрузки:

$$\delta_* = \frac{M_2}{K_p}.$$

При малых  $\delta$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  двухосный ГС можно рассматривать как два независимых одноосных ГС.

Уравнения движения ГС и условия устойчивости совпадают с полученными выше аналитическими выражениями для одноосного СГС.

В этом случае системы коррекции работают аналогично системе коррекции ГВ. При отклонении платформы от плоскости горизонта на угол  $\alpha$  сигнал с маятника  $M_2$  (ЭУ или акселерометра) подается на ДМ2, который развивает коррекционный момент  $M_k(\alpha) = E\alpha$ .

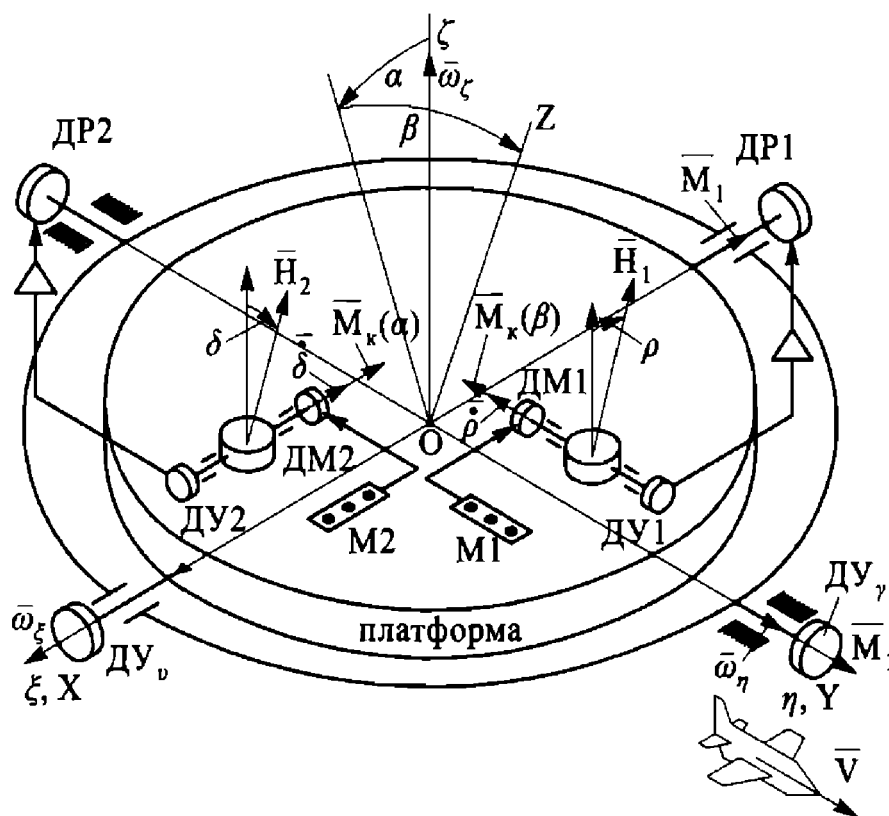


Рис. 103. Схема двухосного СГС, корректируемого по вертикали

Под действием коррекционного момента  $\bar{H}_2$  стремится совместиться с  $\bar{M}_k(\alpha)$  со скоростью  $\varepsilon\alpha$  до тех пор, пока платформа не придет в плоскость горизонта  $\alpha \approx 0$ .

Аналогичный процесс происходит по каналу коррекции М1—ДМ1 ( $\beta \approx 0$ ).

При выполнении условий устойчивости анализ погрешностей двухосного корректируемого ГС проводится с помощью прецессионных уравнений. Уравнения корректируемого ГС совпадают с уравнениями движения ГВ и соответствующей структурой погрешностей (скоростные, баллистические, навигационные и т. д.).

Съем сигнала по крену и тангажу осуществляется с  $ДУ_\gamma$  и  $ДУ_\vartheta$ .

### Трехосный гиростабилизатор

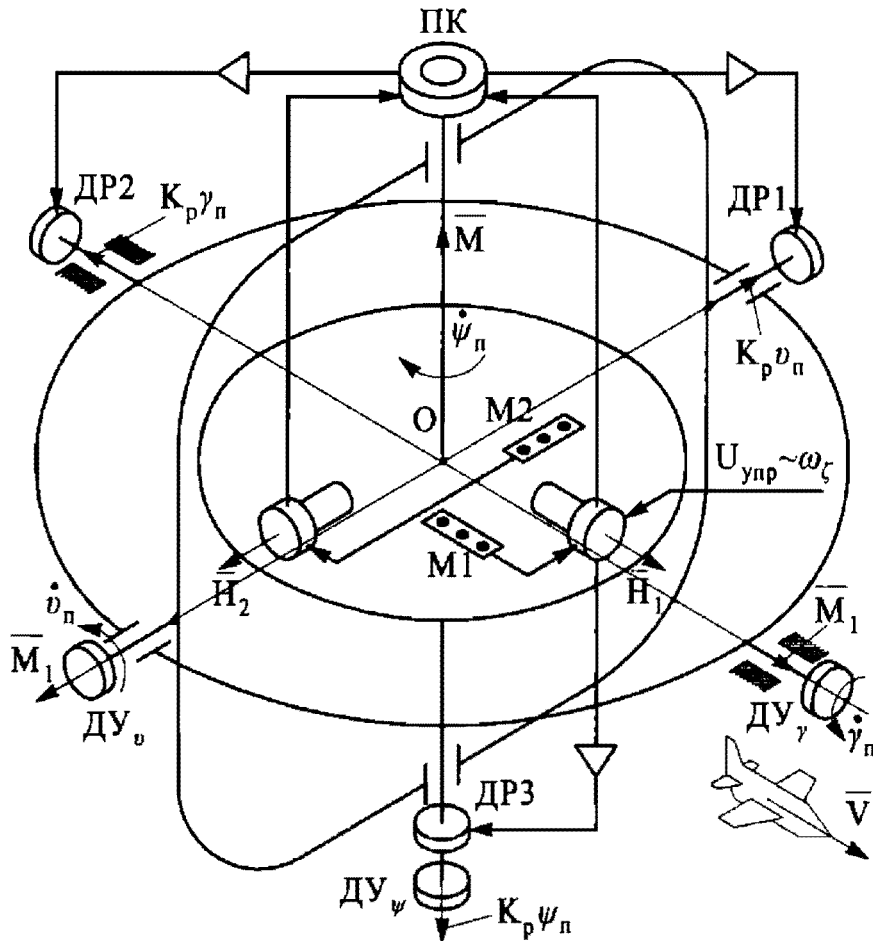
Трехосный гиростабилизатор обеспечивает стабилизацию объекта (или платформы) в пространстве.

Рассмотрим схему трехосного корректируемого ИГС, построенного на двух динамически настраиваемых гироскопах, которые работают в режиме свободного гироскопа (рис. 104).

При повороте платформы под действием внешнего момента  $M$  на угол  $\psi_n$  (курсовой канал) с первого гироскопа ( $\bar{H}_1$ ) сигнал через усилитель поступает на ДР, который развивает момент  $K_p\psi_n$ , уравновешивающий внешний момент  $\bar{M}$ . Аналогично происходит процесс по двум другим каналам. Системы разгрузки:  $M_1 = K_p\vartheta_n$ ;  $M_2 = K_p\gamma_n$ , где  $\psi_n$ ,  $\vartheta_n$ ,  $\gamma_n$  — углы, характеризующие положение платформы относительно корпуса ( $\psi_n$  определяет положение платформы относительно внутренней рамки,  $\vartheta_n$  — положение внутренней рамки карданова подвеса относительно наружной,  $\gamma_n$  — положение наружной рамки карданова подвеса).

Избыточную информацию с гироскопа, кинетический момент которого равен  $\bar{H}_2$ , используют в технологических целях.

Управление двигателями разгрузки ДР1 и ДР2 ведется через преобразователь координат (ПК) при развороте ЛА по курсу  $\psi = 0 \dots 2\pi$ .



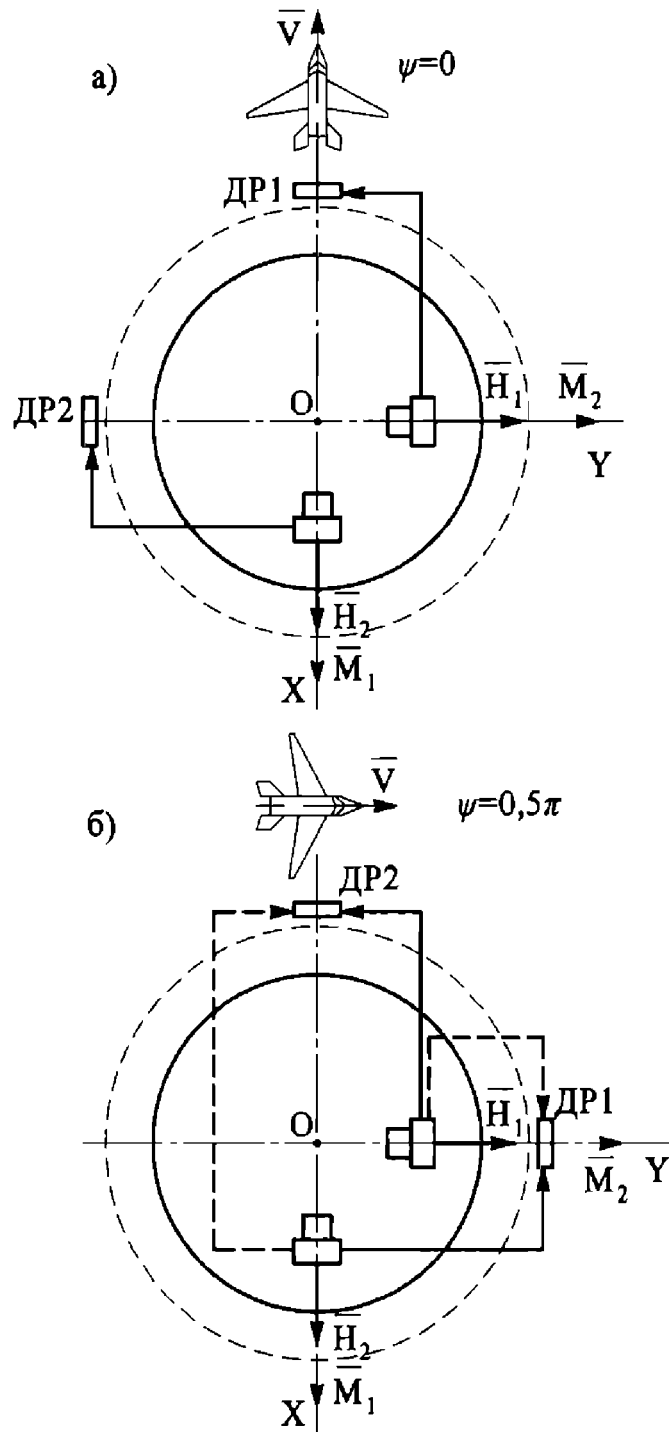
**Рис. 104.** Схема трехосного ИГС, корректируемого в азимуте и по вертикали (курсовертикаль), с ДНГ

Поясним необходимость применения ПК с помощью рис. 105. При курсе ЛА  $\psi = 0$  (рис. 105, а) датчики углов гироскопов и двигатели подключены «правильно»:  $\bar{H}_1 \rightarrow \text{ДР1}$ ,  $\bar{H}_2 \rightarrow \text{ДР2}$ . При  $\psi = 0,5\pi$  (рис. 105, б) происходит разворот карданова подвеса относительно платформы и двигатели ДР1 и ДР2 располагаются так, что прежние цепи (показаны штриховой линией) не соответствуют правильному формированию каналов разгрузки. Поэтому необходимо переключение гироскопа с моментом  $\bar{H}_1$  на ДР2, с моментом  $\bar{H}_2$  — на ДР1. Это осуществляется с помощью синусно-косинусного преобразователя координат ПК.

Выберем следующие законы формирования моментов разгрузки (рис. 106) :

$$M_{x1} = -K_p \vartheta_{п} \cos \psi + K_p \gamma_{п} \sin \psi;$$

$$M_{y1} = -K_p \gamma_{п} \cos \psi + K_p \vartheta_{п} \sin \psi.$$



**Рис. 105.** Схема переключения ДР1 и ДР2 при изменении курсового угла  $\psi = 0 \dots 2\pi$

Проекции моментов разгрузки на оси платформы  $OX, OY$ :

$$M_X = M_{x1} \cos \psi + M_{y1} \sin \psi ;$$

$$M_Y = M_{y1} \cos \psi + M_{x1} \sin \psi ;$$

$$M_X = K_p \vartheta_n \cos^2 \psi + K_p \gamma_n \sin \psi \cos \psi - K_p \gamma_n \cos \psi \sin \psi - \\ - K_p \vartheta_n \sin^2 \psi = -K_p \vartheta_n;$$

$$M_Y = -K_p \gamma_n \cos^2 \psi + K_p \vartheta_n \sin \psi \cos \psi - K_p \vartheta \cos \psi \sin \psi - \\ - K_p \gamma_n \sin^2 \psi = -K_p \gamma_n,$$

т. е. формирование моментов разгрузки, действующих на платформу, не зависит от угла разворота  $\psi$  ЛА в горизонтальной плоскости благодаря применению ПК. В трехосном гиростабилизаторе баллистической ракеты ПК устанавливают по каналу тангажа  $\vartheta$ .

При наличии ПК трехосный ГС можно рассматривать как три независимых одноосных ГС. При обеспечении устойчивости каналов разгрузки анализ погрешностей выполняют с использованием прецессионных уравнений движения ГС.

Коррекция платформы осуществляется с помощью маятников (акселерометров или ЭУ); система коррекции работает аналогично системе коррекции двухосного ГС. Курсовой канал реализует схему ГПК или УНО (для авиации), т. е. на датчик момента гироскопа с моментом  $\bar{H}_1$  подается сигнал, пропорциональный  $(U \sin \varphi + \frac{VE}{R} \operatorname{tg} \varphi)$  или  $U \sin \varphi$ .

Тогда получают системы уравнений гировертикали и курсового прибора (гирополукомпас, указателя направления ортодромии), анализ которых приведен выше.

Корректируемый трехосный ГС является карданной системой ориентации, определяющей углы  $\psi$ ,  $\gamma$ ,  $\vartheta$  ЛА (курсовертикаль). Бескарданые системы ориентации моделируют такую систему.

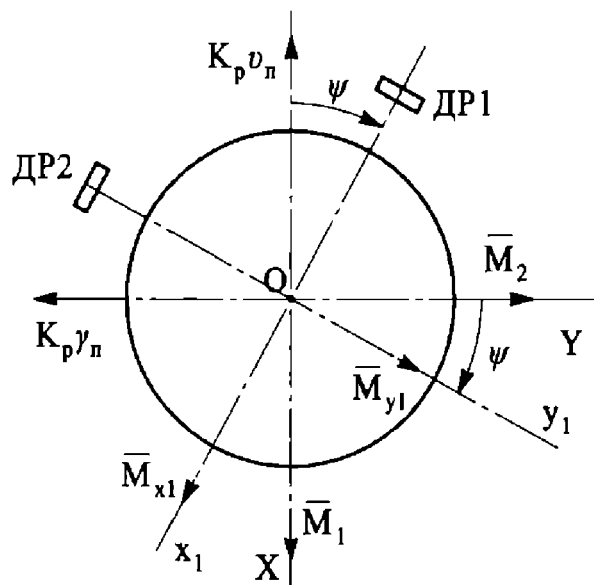


Рис. 106. К определению моментов разгрузки при наличии ПК

## ЛИТЕРАТУРА

---

---

1. *Распопов В.Я.* Микромеханические приборы. М.: Машиностроение, 2007.
2. Гироскопические системы: В 3 ч. / Под ред. Д.С. Пельпора. М.: Высш. шк., 1986—1988.
3. *Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А.* Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах. М.: Физматлит, 2008.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
Введение .....	7
1. Модель погрешности гироскопа .....	51
2. Уравнения движения трехстепенного гироскопа в подвижной системе координат .....	60
3. Определение курса объекта с помощью трехстепенного гироскопа .....	68
Гирополукомпас и указатель направления ортодромии .....	68
Гироскопас. Гироскопабит .....	73
4. Определение углов ориентации объекта относительно вертикали с помощью гироскопа .....	80
Маятник .....	80
Свободный гироскоп как измеритель вертикали .....	83
Гиромаятник .....	84
Гироскопическая вертикаль .....	87
5. Гироскопические приборы системы управления баллистичес- кой ракеты .....	98
Гирогоризонт и гировертиконт .....	98
Гироинтегратор линейных ускорений .....	101
6. Интегрирующий гироскоп .....	110
7. Гироскопические датчики угловой скорости с быстро- вращающимся ротором .....	118
Датчики угловой скорости, построенные на базе двухстепен- ного гироскопа .....	118
Трехстепенной датчик угловой скорости, построенный на базе астатического гироскопа .....	127
Роторный вибрационный гироскоп .....	131
8. Динамически настраиваемый гироскоп .....	137
9. Вибрационный рамочный гироскоп .....	149
10. Волновой твердотельный гироскоп .....	153
11. Оптические гироскопы .....	159
Волоконно-оптический гироскоп .....	159
Лазерный ДУС .....	162
12. Микромеханический гироскоп рамочного типа .....	172
13. Гиросtabilизаторы .....	178
Одноосный гиросtabilизатор .....	178
Двухосный гиросtabilизатор .....	184
Трехосный гиросtabilизатор .....	186
Литература .....	190



*Научное издание*

**Матвеев** Валерий Александрович

**ГИРОСКОП — ЭТО ПРОСТО**

Редактор *Н.А. Фетисова*  
Технический редактор *Э.А. Кулакова*  
Художник *Н.Г. Столярова*  
Компьютерная верстка *Н.Ф. Бердавцевой*

Оригинал-макет подготовлен  
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Санитарно-эпидемиологическое заключение  
№ 77.99.60.953.Д.003961.04.08 от 22.04.2008 г.

Подписано в печать 22.02.12. Формат 60×90 1/16.  
Усл. печ. л. 12,0. Тираж 300 экз. Заказ 94

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.  
E-mail: [press@bmstu.ru](mailto:press@bmstu.ru)    <http://www.press.bmstu.ru>

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.  
E-mail: [mgtupress@mail.ru](mailto:mgtupress@mail.ru)

## Вниманию читателей!

Место	Напечатано	Следует читать
с. 5, 14-я стр. снизу	...виброскопов...	...виброгироскопов...
с. 5, 8-я стр. снизу	...центробежным моментом инерции...	...центробежным инерционным моментом...
с. 9, 15-я стр. сверху	...на подвижном...	...на неподвижном...
с. 15, 2-я стр. снизу	...где $M_{ин}$ — момент инерции твердого тела,...	...где $M_{ин}$ — инерционный момент твердого тела,...
с. 17, формула (12)	$A^2 + \left(\beta - \frac{\dot{\alpha}_0}{n}\right)^2 = \left(\frac{\dot{\alpha}_0}{n}\right)^2.$	$\alpha^2 + \left(\beta - \frac{\dot{\alpha}_0}{n}\right)^2 = \left(\frac{\dot{\alpha}_0}{n}\right)^2.$
с. 21, 5-я стр. сверху	где $K_{пр} = -H^2/A = Hn$ ...	где $K_{пр} = H^2/A = Hn$ ...
с. 21, 4-я стр. снизу	...моментами инерции...	...инерционными моментами...
с. 30, 3-я стр. снизу	...ГК с подвижным основанием.	...ГК на подвижном основании.
с. 33, 4-я стр. снизу	...вокруг оси $OZ$ .	...вокруг оси $OY$ .
с. 34, 9-я стр. снизу	$V_T = V_0 \cos vt.$	$V_T = V_0 \sin vt.$
с. 34, 4-я стр. снизу	$M_{упр} = K\beta,$ ...	$M_{упр} = K\alpha,$ ...
с. 34, 3-я стр. снизу	Угол $\beta$ «закрутки»...	Угол $\alpha$ «закрутки»...
с. 35, 1-я стр. сверху	$U_{вых} = K_{ду}\beta = \dots$	$U_{вых} = K_{ду}\alpha = \dots$
с. 36, формула (28)	$\dots = -\frac{2mr_0av}{\xi K} \Omega \cos vt.$	$\dots = -\frac{2mr_0a\omega_0}{\xi K} \Omega \cos vt.$
с. 39, 5-я стр. сверху	Момент инерции рамки	Инерционный момент рамки
с. 39, 7-я стр. снизу	...центробежный момент инерции...	...центробежный инерционный момент...
с. 48, 16-я стр. снизу	...(БСО), расположенных геометрически с помощью датчиков углов, углы ориентации объекта устанавливают аналитически...	...(БСО) углы ориентации объекта определяют аналитически...

Место	Напечатано	Следует читать
с. 48, 12-я стр. снизу	В настоящее время системы строятся...	Автономные системы навигации строятся...
с. 48, 10-я стр. снизу	...для бесплатформенной системы инерциальной системы навигации (БИНС)...	...для бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС)...
с. 51, 12-я стр. снизу	от «сухих» гироскопов,... в жидкость);...	от «сухих» гироскопов),... в жидкость;...
с. 60, 3-я стр. сверху	Для установления ориентации...	Для осуществления ориентации...
с. 64, формула (47)	$\omega_{\eta\tau} = U c \cos \varphi \cos \psi$ ;	$\omega_{\eta\tau} = U \cos \varphi \cos \psi$ ;
с. 66, формула (50)	$\alpha_* = [-\omega_\zeta + \beta_* \times \times (\omega_\eta \cos \alpha - \omega_\xi \sin \alpha) + \dots$	$\alpha_* = [-\omega_\zeta + \beta_* \times \times (\omega_\eta \cos \alpha_0 - \omega_\xi \sin \alpha_0) + \dots$
с. 112, 13-я стр. снизу	Погрешность, вызванная с действием...	Погрешность, вызванная действием...
с. 119, 8-я стр. сверху	...(см. выражение (23))	...(см. выражение (22))
с. 122, 18-я стр. снизу	1) момент инерции гиروزла...	1) инерционный момент гиروزла...
с. 122, 12-я стр. снизу	2) центробежный момент инерции...	2) центробежный инерционный момент...
с. 123, 6-я стр. сверху	...центробежным моментом инерции,...	...центробежным инерционным моментом,...
с. 123, 11-я стр. снизу	...при наличии ДУС),...	...при наличии датчика угловых ускорений),...
с. 124, 3-я стр. снизу	$\beta = \lambda \frac{H}{K} \sin(\omega t - \varphi)$ ,	$\beta = \lambda \frac{H}{K} \Omega_{\zeta a} \sin(\omega t - \varphi)$ ,
с. 132, 9-я стр. сверху	...центробежный момент инерции...	...центробежный инерционный момент...
с. 132, 17-я стр. сверху	...учитывая момент инерции...	...учитывая инерционный момент...
с. 132, 1-я стр. снизу	...центробежным моментом инерции...	...центробежным инерционным моментом...
с. 137, 5-я стр. сверху	...центробежным моментом инерции...	...центробежным инерционным моментом...
С. 139, 3-я стр. сверху	...центробежные моменты инерции...	...центробежные инерционные моменты...
с. 160, 6-я стр. снизу	С увеличением возрастают...	С увеличением площади контура возрастают...
с. 176, 13-я стр. снизу	...с выражением (30),...	...с выражением для $U_{\text{вых}}$ на с. 42,...